Algebra I. Lista 14

Wszystko dzieje się w standardowym $\mathbf{R}^n$ lub $\mathbf{C}^n$ lub w (skończenie wymiarowej) przestrzeni euklidesowej/unitarnej V, chyba że treść zadania mówi inaczej.

1. Odpocznij przez co najmniej 60 sekund. (To zadanie odbywa się w pewnej czterowymiarowej rozmaitości lorentzowskiej.)
2. Wyznacz postać kanoniczną i bazę ortonormalną w której jest ona przyjmowana dla ortogonalnych przekształceń $\mathbf{R}^n$ zadanych w bazie standardowej macierzami:
$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$;
3. Zdiagonalizuj w bazie ortonormalnej macierze:
$\begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
4. Wyznacz ortonormalną bazę wektorów własnych i macierz w tej bazie przekształcenia unitarnego, zadanego w pewnej bazie ortonormalnej macierzą: $\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$; $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}$.
5. Znajdź rozkłady biegunowe przekształceń $\mathbf{R}^n$: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.
6. Podaj przykład trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej V, samosprzężonego $T\colon V \to V$, oraz bazy V złożonej z parami nieprostopadłych wektorów własnych T.

---

7. Uzasadnij, że jeśli ortogonalne przekształcenie $\mathbf{R}^6$ ma rzeczywistą wartość własną, to ma też przynajmniej dwa liniowo niezależne wektory własne.
8. Które przekształcenia ortogonalne są samosprzężone?
9. Niech $T = T^*$. Udowodnij, że T jest nieujemnie określone wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Spec}(T) \subset [0, +\infty)$.
10. Niech $A = US$, $A' = U'S'$ będą rozkładami biegunowymi odwracalnych endomorfizmów A, A' przestrzeni unitarnej V. Udowodnij, że jeśli $A'A^{-1}$ jest przekształceniem unitarnym, to $S = S'$.
11. Niech krzywa C (w standardowym $\mathbf{R}^2$) będzie dana równaniem postaci $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$. Uzasadnij, że istnieje ortonormalna baza $\mathbf{R}^2$, taka że we współrzednych z nią związanych krzywa C jest zadana równaniem postaci $\lambda(x')^2 + \mu(y')^2 = 1$. (Jest to tzw. postać kanoniczna równania.) Jak szukać tej bazy i liczb λ, μ?
12. Znajdź postać kanoniczną równania krzywej i bazę ortonormalną w której jest ona przyjmowana. Rozpoznaj i naszkicuj krzywą. (a) $x^2 + 3xy + y^2 + 1 = 0$, (b) $4x^2 + 2\sqrt{2}xy + 3y^2 = 1$, (c) $x^2 - 2xy + y^2 = 1$.
13. Zidentyfikuj powierzchnię (np. jako elipsoidę, parę płaszczyzn itp.), nie znajdując dokładnych wartości współczynników postaci kanonicznej a jedynie określając ich znaki.
(a) $x^2 - 2xy + 2y^2 + 4xz + 3z^2 = 1$,
(b) $x^2 - 2xy + 2xz + 4yz + 3z^2 = 0$,
(c) $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2xz + 2yz + 4z^2 = 1$,
(d) $-2x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 6yx - 2z^2 = 1$.
14. Udowodnij, że jeśli $T = T^*$, to $\sup\{\|Tx\| : x \in V, \|x\| \leq 1\} = \sup\{\langle Tx, x\rangle : x \in V, \|x\| \leq 1\}$. (Lewą stronę tej równości nazywamy *normą* przekształcenia T i oznaczamy $\|T\|$.)
15. Niech $A = \sum_j \lambda_j P_j$ będzie rozkładem spektralnym operatora normalnego A. Dla funkcji $f\colon \mathrm{Spec}(A) \to \mathbf{C}$ określamy $f(A) = \sum_j f(\lambda_j) P_j$. Sprawdź, że jeśli f jest funkcją wielomianową, to ta definicja zgadza się z wcześniejszą.
16. Udowodnij, że jeśli A jest operatorem samosprzężonym, to $\exp(iA)$ jest operatorem unitarnym. Uzasadnij, że każdy operator unitarny jest tej postaci.

---

17. Załóżmy, że operatory A i B są samosprzężone, przy czym A jest dodatnio określony. Udowodnij, że AB jest diagonalizowalny i ma rzeczywiste wartości własne.
18. Czy istnieje iloczyn skalarny na $\mathbf{R}^3$, taki że cosinusy kątów między wektorami e_1, e_2, e_3, wynoszą $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$?
19. (V zespolona, $A, B\colon V \to V$ liniowe)
 a) Uzasadnij, że jeśli A jest unitarne a 1 nie jest jego wartością własną, to $B = i(A - Id)^{-1}(A + Id)$ jest samosprzężone.
 b) Uzasadnij, że jeśli B jest samosprzężone, to $A = (B - iId)^{-1}(B + iId)$ jest unitarne.
20. (SVD – singular value decomposition) Niech $A \in M_{n\times k}(\mathbf{R})$. Udowodnij, że istnieją macierze ortogonalne $U \in M_n(\mathbf{R})$, $V \in M_k(\mathbf{R})$, oraz macierz $B \in M_{n\times k}(\mathbf{R})$ o wyrazach nieujemnych spełniająca $b_{ij} = 0$ dla $i \neq j$, takie że $A = UBV$.
21. (V zespolona) Uzasadnij, że każde przekształcenie liniowe $V \to V$ jest kombinacją liniową czterech przekształceń unitarnych.