Algebra ISIM. Lista 2

1. Uzasadnij, że zbiór $\{1, \sqrt{2}\}$ jest lnz w $\mathbf{R}$ traktowanym jako przestrzeń liniowa nad $\mathbf{Q}$.
2. Niech $F\colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnij, że: (a) $F(0) = 0$; (b) $F^{-1}[\{0\}] < V$; (c) $F[V] < W$.
3. Stosując algorytm Steinitza dokonaj wymiany dla bazy $(1,0,0)^\top, (1,1,0)^\top, (1,1,1)^\top$ i liniowo niezależnego podzbioru $(0,0,1)^\top, (0,1,1)^\top$ przestrzeni $\mathbf{R}^3$.
4. Niech $\mathcal{X} = \{X \subseteq \mathbf{R}^2 \mid X \text{ lnz}\}$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym z dowodu twierdzenia o istnieniu bazy. Jaka jest moc zbioru $\mathcal{X}$? Jaka jest maksymalna długość łańcucha w $\mathcal{X}$?
5. Sprawdź, że $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ zadane wzorem $F\binom{x}{y} = \binom{2x+3y}{-x+5y}$ jest liniowe.

---

6. Załóżmy, że $B = (b, b_2, b_3)$ i $C = (c, b_2, b_3)$ są bazami $\mathbf{R}_2[X]$. Dla $P \in \mathbf{R}_2[X]$ mamy $P = \alpha_1 b + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$ oraz $P(X) = \alpha'_1 c + \alpha'_2 b_2 + \alpha'_3 b_3$, przy pewnych $\alpha_i, \alpha'_i \in \mathbf{R}$ zależnych od P. Czy prawdą jest, że dla każdego P zachodzi $\alpha_2 = \alpha'_2$ i $\alpha_3 = \alpha'_3$?
7. Udowodnij, że każde liniowe $F\colon K^2 \to K$ jest postaci $F\binom{x}{y} = ax + by$, dla pewnych $a, b \in K$.
8. Niech $F\colon \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}^2$ będzie przekształceniem liniowym zadanym następująco (przez swe wartości na bazie):

$$F(1) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad F(X+1) = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \quad F(X^2) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad F(X^3 - X) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

   Wyraź $F(P)$ jawnym wzorem (a) w terminach wartości wielomianu P w stosownie dobranych punktach; (b) w terminach współczynników wielomianu P.

   Dla podzbiorów A, B przestrzeni liniowej V określamy sumę kompleksową $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.
9. Uzasadnij lub obal (A, B to dowolne podzbiory dowolnej przestrzeni liniowej): $\mathrm{Lin}(A \cup B) = \mathrm{Lin}(A) + \mathrm{Lin}(B)$, $\mathrm{Lin}(A \cap B) = \mathrm{Lin}(A) \cap \mathrm{Lin}(B)$, $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{Lin}(A) \subseteq \mathrm{Lin}(B)$, $\mathrm{Lin}(\mathrm{Lin}(A)) = \mathrm{Lin}(A)$.
10. Udowodnij, że jeśli przekształcenie liniowe F jest funkcją odwracalną (tzn. bijekcją), to funkcja odwrotna do F też jest przekształceniem liniowym.
11. Udowodnij lub obal:
   a) Jeśli układ wektorów $v_1, \ldots, v_n \in V$ jest lz, a $F\colon V \to W$ jest przekształceniem liniowym, to układ wektorów $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ też jest lz.
   b) Jeśli zbiór $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ jest lz, a $F\colon V \to W$ jest przekształceniem liniowym, to zbiór $\{F(v_1), \ldots, F(v_n)\}$ też jest lz.
   c) Jeśli układ wektorów $v_1, \ldots, v_n \in V$ jest lnz, a $F\colon V \to W$ jest przekształceniem liniowym, to układ wektorów $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ też jest lnz.
12. $B = (1, X-2, (X-2)^2, \ldots, (X-2)^n)$ jest bazą $\mathbf{R}_n[X]$; znajdź (w zeszycie z analizy) wzór na przedstawienie wielomianu $P \in \mathbf{R}_n[X]$ w postaci kombinacji liniowej elementów tej bazy.

---

13. Udowodnij, że przestrzenie liniowe które mają bazy tej samej mocy są izomorficzne.
14. Udowodnij, że jeśli $W < V$, zaś $f\colon W \to U$ jest przekształceniem liniowym, to istnieje przekształcenie liniowe $F : V \to U$, takie że f jest obcięciem F do W. Znajdź takie F dla $V = \mathbf{R}_2[X]$, $W = \{P \in \mathbf{R}_2[X] \mid P(3) = 0\}$, $U = \mathbf{R}_1[X]$, $f(P) = \frac{P(X)}{X-3}$.
15. Niech $W < V$, $W' < V$, $\dim V < \infty$.
   a) Uzasadnij, że $W + W' < V$.
   b) Uzasadnij, że $W + W' = \mathrm{Lin}(W \cup W')$.
   c) Udowodnij, że $\dim(W + W') = \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W')$.
16. Czy jest prawdą, że dla dowolnych skończenie wymiarowych podprzestrzeni U, V, W dowolnej przestrzeni liniowej zachodzi wzór (udowodnij lub podaj kontrprzykład):

$$\dim(U+V+W) = \dim(U)+\dim(V)+\dim(W)-\dim(U\cap V)-\dim(V\cap W)-\dim(W\cap U)+\dim(U\cap V\cap W)$$

   Uogólnij na większą liczbę składników.
17. Podaj przykład przestrzeni liniowej (nieskończenie wymiarowej) V i jej endomorfizmu $F : V \to V$, który (a) jest epimorfizmem, ale nie jest monomorfizmem; (b) jest monomorfizmem, ale nie jest epimorfizmem.

Algebra I

Prowadzący: Jan Dymara (`dymara@math.uni.wroc.pl`, `www.math.uni.wroc.pl/~dymara/`)
Wykład: poniedziałki, 12-15, 601.
Ćwiczenia: środy, 10-13, B.
Konsultacje: poniedziałki 11-12 + ?? + na zamówienie.
Egzamin: 26.VI.2020 (piątek), 9-13, EM.

Program i literatura.

Jak w USOSie.

Zasady zaliczania.

Odbędzie się jedno 1-godzinne kolokwium 18.III (15 pkt.) i trzy 2-godzinne kolokwia: 1.IV, 6.V, 10.VI. (po 35 pkt.). Punktowe progi na kolejne oceny: 45, 60, 75, 90, 105. Aktywność na ćwiczeniach może przynieść podniesienie oceny o pół. Usprawiedliwiona nieobecność na jednym kolokwium będzie skutkować przeliczeniem proporcjonalnym punktów z pozostałych kolokwiów.

Przenosiny.

Przenosiny na zajęcia "Algebra liniowa 2" są możliwe do 7.IV – tak, by wszyscy przenoszący się napisali na tamtym przedmiocie kolokwium 8.IV.