Algebra I. Lista 3

Na tej liście "układ" zwykle oznacza "liniowy układ równań".

1. Napisz jawnym wzorem izomorfizm $F : \mathbf{R}^3 \to V$, dla (a) $V = \{(x,y,z,t)^\top \in \mathbf{R}^4 : x+2y+z+3t=0\}$; (b) $V = \{P \in \mathbf{R}_4[X] : P''(0) = P(1) = 0\}$. W przypadku b) oblicz $F^{-1}(X - X^3)$.
2. Zdefiniuj operacje kolumnowe i uzasadnij, że nie zmieniają one rzędu macierzy.
3. Znajdź wielomian $P(X)$ stopnia 3 o współczynnikach rzeczywistych, taki że $P(-2)=1$, $P(-1)=3$, $P(1)=13$ i $P(2)=33$.
4. Dla poniższych układów równań znajdź rozwiązanie ogólne.
$$\begin{cases} 5x_1+3x_2+5x_3+12x_4=10 \\ 2x_1+2x_2+3x_3+5x_4=4 \\ x_1+7x_2+9x_3+4x_4=2 \end{cases} \begin{cases} -9x_1+10x_2+3x_3+7x_4=7 \\ -4x_1+7x_2+x_3+3x_4=5 \\ 7x_1+5x_2-4x_3-6x_4=3 \end{cases} \begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3-2x_4+x_5=4 \\ 6x_1+3x_2+5x_3-4x_4+3x_5=5 \\ 2x_1+x_2+7x_3-4x_4+x_5=11 \\ 4x_1+2x_2+2x_3-3x_4+3x_5=6 \end{cases}$$
5. Wyznacz fundamentalny układ rozwiązań układu jednorodnego:
$$\begin{cases} x_1-x_3+x_5=0 \\ x_2-x_4+x_6=0 \\ x_1-x_2+x_5-x_6=0 \\ x_2-x_3+x_6=0 \\ x_1-x_4+x_5=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5=0 \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5=0 \\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5=0 \\ 7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5=0 \end{cases}$$

---

6. Dla jakich prawych stron układy z poprzedniego zadania pozostają niesprzeczne? Wsk.: Rozważ układ $AX=B$ z $B=[y_1,y_2,\ldots]$; jego macierz rozszerzoną sprowadź do postaci schodkowej.
7. Z tw. Bezouta wywnioskuj, że jeśli wielomian stopnia ≤ 13 zeruje się w $1,2,3,\ldots,14$, to musi on być wielomianem zerowym. Używając tw. o indeksie wywnioskuj stąd, że dla dowolnych liczb $a_1,a_2,\ldots,a_{14}$ istnieje (jedyny) wielomian P stopnia ≤ 13 taki że $P(1)=a_1, P(2)=a_2\ldots, P(14)=a_{14}$.
8. Oblicz wymiary następujących przestrzeni: $\{P \in \mathbf{R}_{50}[X] : P(-X) = P(X)\}$, $\{P \in \mathbf{R}_{10}[X] : \int_{-1}^0 P(x)dx = P'(-7) = 0\}$, $\{(x_1,\ldots,x_{100})^\top \in \mathbf{R}^{100} : \sum_{i=1}^{100}(-1)^i x_i = \sum_{i=1}^{100} x_i = \sum_{i=1}^{50} x_{2i} = 0\}$, $\{(x_1,\ldots,x_{100})^\top \in \mathbf{R}^{100} : \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = \sum_{i=1}^{50} x_{2i-1} = 0\}$, $\{P \in \mathbf{R}_3[X] : XP'''(X) + P''(X) = 0, P'(-1) + P(0) = 0\}$.
9. Opisz układem równań przestrzeń $\mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\7\\7\end{pmatrix}\}$.
10. Znajdź jednorodny układ równań liniowych złożony z (a) dwóch (b) trzech (c) czterech równań, dla którego wektory $(1,4,-2,2,-1)^\top$, $(1,13,-1,2,9)^\top$, $(2,7,-8,4,-5)^\top$ stanowią fundamentalny układ rozwiązań.
11. Uzasadnij, że jeśli układ ma co najmniej 2 rozwiązania, to rząd jego macierzy jest mniejszy niż jej liczba kolumn.
12. Uzasadnij, że jeśli rząd macierzy układu jest równy liczbie jej wierszy, to układ jest niesprzeczny. Podaj przykład wskazujący, że nie jest to konieczny warunek niesprzeczności.
13. Udowodnij, że jeśli układ jednorodny ma więcej niewiadomych niż równań, to ma niezerowe rozwiązanie. Udowodnij, że jeśli układ ma więcej równań niż niewiadomych, to można zmienić jego prawe strony tak, by stał się sprzeczny.
14. Mietek i Gucio grają w następującą grę: pobierają z Dziekanatu sprzeczny układ równań; Mietek wybiera i wskazuje palcem pewien wyraz macierzy rozszerzonej tego układu, a wtedy Gucio może dowolnie zmienić jego wartość. Jeśli układ pozostaje sprzeczny, wygrywa Mietek; w przeciwnym razie wygrywa Gucio. Podaj przykład układu, dla którego (a) Mietek ma strategię wygrywającą; (b) Gucio ma strategię wygrywającą. Spróbuj podać po kilka przykładów, różnych rozmiarów i możliwie nietrywialnych.
15. Uzasadnij, że używając operacji wierszowych i kolumnowych można dowolną macierz sprowadzić do postaci "diagonalnej", tj. takiej, w której $a_{ij}=0$ dla $i \neq j$.

---

16. Uzasadnij, że zbiór prawych stron dla których układ o ustalonej macierzy A jest niesprzeczny jest podprzestrzenią liniową; uzasadnij, że wymiar tej podprzestrzeni plus wymiar przestrzeni rozwiązań układu jednorodnego o tej samej macierzy A jest równy liczbie kolumn A.
17. Niech $W < K^n$, $W = \mathrm{Lin}\{v_1,\ldots,v_k\}$, $\dim W = s$. Udowodnij, że W można opisać układem $n-s$ równań.

18. Wytłumacz, jak mając układ równań opisujący podprzestrzeń $W < \mathbf{R}^n$ i wektor $v \in \mathbf{R}^n$ wyznaczyć układ równań opisujący zbiór $v + W (= \{v + w \mid w \in W\})$. Opisz zbiór $\{(1,0,-1,1)^\top + t(1,2,1,-2)^\top + s(-1,3,4,0)^\top + u(-1,8,9,-2)^\top : t,s,u \in \mathbf{R}\}$ układem równań.
19. Załóżmy, że $\dim(V) = n$, $W < V$, $\dim(W) = k$. Uzasadnij, że istnieje izomorfizm $F : V \to K^n$, taki że $F[W] = \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)^\top : x_1, \dots, x_k \in K\}$. Napisz taki izomorfizm wzorem dla $V = \mathbf{R}_3[X]$, $W = \{P \in V : P'(1) + P(0) = 0\}$.
20. Oblicz wymiar przestrzeni
 a) $\{P \in \mathbf{R}_{100}[X] : \int_{-1}^{1} e^{-x^2} P(x)dx = \int_{-2}^{2} e^{-x^2} P(x)dx = 0\}$;
 b) $\{P \in \mathbf{R}_{100}[X] : \int_{-1}^{1} e^{-x^2} P(x)dx = \int_{-2}^{2} e^{-x^2} P(x)dx = \ldots = \int_{-100}^{100} e^{-x^2} P(x)dx = 0\}$.

Rozwiązywanie układu równań

Układ równań o macierzy A i macierzy rozszerzonej $(A|B)$ zapisujemy skrótowo: $AX = B$, gdzie $B = [x_1, \dots, x_n]$, a n to liczba kolumn A. Załóżmy, że sprowadziliśmy macierz rozszerzoną takiego układu do postaci schodkowej. Wtedy układ można łatwo rozwiązać.

Przykład

Załóżmy, że po przekształceniu układu $AX = B$ otrzymaliśmy postać schodkową

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Odpowiada ona układowi

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ \qquad\qquad 6x_3 + 7x_4 = 8. \end{cases}$$

Zmienne główne to x_1, x_3; wolne – x_2, x_4. Z drugiego równania wyliczamy x_3:

$$x_3 = -\frac{7}{6}x_4 + \frac{4}{3}.$$

Wstawiamy to do pierwszego równania i wyliczamy x_1:

$$x_1 = -2x_2 - 3(-\frac{7}{6}x_4 + \frac{4}{3}) - 4x_4 + 5 = -2x_2 - \frac{1}{2}x_4 + 1.$$

Ostatecznie

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 \\ \frac{4}{3} - \frac{7}{6}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4/3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -7/6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Otrzymane wyrażenie nazywamy postacią ogólną rozwiązania (bądź rozwiązaniem w postaci ogólnej) układu. Wektor $[1, 0, 4/3, 0]$ to tzw. rozwiązanie szczególne. Układ wektorów, przy których zmienne wolne są współczynnikami (u nas: $[-2, 1, 0, 0]$ i $[-1/2, 0, -7/6, 1]$) to tzw. FURUJ – Fundamentalny Układ Rozwiązań Układu Jednorodnego (czyli układu $AX = 0$).

W pełnej ogólności, rozwiązanie szczególne układu $AX = B$ to dowolne jedno konkretne jego rozwiązanie, a FURUJ to dowolna baza przestrzeni $\{X \in K^n \mid AX = 0\}$. Metoda Gaussa pozwala w systematyczny sposób znajdować te obiekty.
Polecenie "opisz $W < K^n$ układem równań" znaczy: znajdź macierz A, taką by $W = \{X \in K^n \mid AX = 0\}$.