Algebra I. Lista 4

1. Uzupełnij haiku: “Druga linijka / ... dranie / pierwsze zadanie”.
2. Znajdź macierze odwrotne do następujących:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Udowodnij, że $\dim \operatorname{Im} \varphi_A = \operatorname{rank} A$.
4. Wytłumacz, w jaki sposób napis ${}^tA^{-1}$ mógłby być dwuznaczny, a następnie udowodnij, że jednak dwuznaczny on nie jest.
5. Udowodnij, że $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (o ile $ad - bc \neq 0$).
6. Udowodnij, że macierz $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ spełnia $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = 0$.

---

7. Permutację $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ przedstaw w postaci (a) iloczynu transpozycji; (b) iloczynu transpozycji postaci $(i, i+1)$. Postaraj się znaleźć przedstawienia z możliwie małą liczbą czynników.
8. Uzasadnij, że każde $\sigma \in S_n$ można przedstawić jako iloczyn transpozycji $(1,2), (1,3), (1,4), \dots (1,n)$.
9. Dla podanych macierzy A wyznacz $\operatorname{rank} A$, bazę $\operatorname{Im} \varphi_A$ i bazę $\ker \varphi_A$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 3 \\ 11 & 17 & -8 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 3 \\ 7 & 9 & 9 & 6 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Udowodnij, że jeśli $F\colon K^n \to K^k$ jest monomorfizmem, to istnieje przekształcenie liniowe $G\colon K^k \to K^n$, takie że $G \circ F = \mathrm{Id}$. (Dlaczego nie wynika stąd, że każdy monomorfizm jest izomorfizmem?) Znajdź macierze dwóch różnych takich G dla $F = \varphi_A\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ zadanego macierzą $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
11. Udowodnij, że jeśli macierz kwadratowa N spełnia $N^3 = 0$, to $(E+N)^{-1} = E - N + N^2$. Używając tego faktu oblicz

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

12. Niech $B \in M_{(k+1)\times n}(\mathbf{R})$ będzie macierzą otrzymaną z $A \in M_{k\times n}(\mathbf{R})$ przez dopisanie (u dołu) jednego wiersza. Czy może się zdarzyć, że wymiar $\operatorname{Im}(\varphi_B)$ jest mniejszy niż wymiar $\operatorname{Im}(\varphi_A)$?
13. Uzasadnij, że $\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.
14. Niech $A \in M_{n\times k}(K)$, $B \in M_{k\times n}(K)$. Załóżmy, że $AB = E$ i $BA = E$. Udowodnij, że wtedy $n = k$.
15. Niech $A \in M_{m\times s}(K)$, $B \in M_{s\times n}(K)$. Udowodnij, że $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - s \leq \operatorname{rank} AB$.

---

16. Załóżmy, że $A, B, C \in M_n(K)$, $ABC = 0$. Jaka jest największa możliwa wartość $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B + \operatorname{rank} C$?
17. Niech $A, B \in M_n(K)$. Udowodnij, że jeśli $E + AB$ jest odwracalna, to i $E + BA$ jest odwracalna.
18. Gucio liczył macierz odwrotną do pewnej macierzy kwadratowej A. Napisał macierz rozszerzoną $A|E$, po czym zaczął wykonywać na niej operacje wierszowe. W pewnym momencie zauważył, że wykonanie pewnej operacji kolumnowej – tej samej po obu stronach kreski – od razu daje pożądaną postać $E|B$. Czy Gucio słusznie przypuszcza, że $A^{-1} = B$?
19. Próbujemy wykreślić z macierzy A część wierszy i część kolumn tak, by (po zsunięciu razem tego, co zostało) powstała odwracalna macierz kwadratowa możliwie dużego rozmiaru $\ell \times \ell$. Udowodnij, że największe możliwe takie ℓ jest równe rzędowi A.

20. Macierz o wyrazach całkowitych staramy się sprowadzić do możliwie prostej postaci przez całkowitoliczbowe operacje – wierszowe i kolumnowe. Jak prostą postać potrafisz osiągnąć?
[W operacji całkowitoliczbowej typu III wolno mnożyć tylko przez ± 1.]
21. Naczelnik zakładu penitencjarnego z okazji Wielkiego Święta złożył 100 więźniom następującą propozycję. W pewnym pomieszczeniu ustawione będzie w rzędzie 100 zamkniętych pudełek, a w nich losowo zostaną rozmieszczone karteczki z liczbami od 1 do 100, po jednej w każdym pudełku. Więźniowie po kolei będą wchodzić do tego pomieszczenia. Po wejściu więzień wybiera pudełko, otwiera je i odczytuje karteczkę; potem wybiera inne pudełko, otwiera je i odczytuje karteczkę, itd. Wolno mu otworzyć w sumie 50 pudełek, po czym będzie musiał opuścić pokój, który zostanie następnie przywrócony do stanu sprzed jego wizyty (z tym samym rozmieszczeniem karteczek w pudełkach). Wtedy wejdzie następny z więźniów, itd. Jeśli każdy z więźniów otworzy pudełko ze swoim numerem (więźniowie są oczywiście ponumerowani – liczbami od 1 do 100), to wszyscy odzyskają wolność; w przeciwnym razie wszyscy pozostaną w więzieniu. Więzień po wizycie w pokoju nie ma już kontaktu z innymi więźniami, ale przed rozpoczęciem całej procedury więźniowie mogą się naradzić i ustalić sposób postępowania. Opracuj dla nich strategię z możliwie dużą szansą sukcesu.