Algebra I. Lista 5

1. Napisz fraszkę J. Kochanowskiego “Do lubego Excela”.

2. Wykorzystując wzór na pełne rozwinięcie wyznacznika (lub inaczej) oblicz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Wykorzystując wzór na pełne rozwinięcie wyznacznika (lub inaczej) oblicz

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

5. Oblicz wyznaczniki

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & 7 & -3 & 8 & -9 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

6. Jak zmieni się wartość wyznacznika $n \times n$ jeśli:
a) znak każdego z jego wyrazów zmienić na przeciwny? b) każdy element a_{ij} pomnożyć przez c^{i-j}, $c \neq 0$?
c) pierwszą kolumnę przestawić na ostatnie miejsce, a pozostałe przesunąć w lewo, zachowując ich porządek?
d) wiersze zapisać w odwrotnym porządku?

---

7. Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

8. Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 + x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 + x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n + x \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1} b_1 & a_1^{n-2} b_1^2 & \dots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1} b_2 & a_2^{n-2} b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1} b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2} b_{n+1}^2 & \dots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

9. Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a+b \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

10. Oblicz podane wyznaczniki (w drugim z nich $s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$):

$$\begin{vmatrix} \cos(x_1 - y_1) & \cos(x_1 - y_2) & \dots & \cos(x_1 - y_n) \\ \cos(x_2 - y_1) & \cos(x_2 - y_2) & \dots & \cos(x_2 - y_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(x_n - y_1) & \cos(x_n - y_2) & \dots & \cos(x_n - y_n) \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

11. Stosując wzory Cramera rozwiąż układ

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

12. Wiadomo, że wyrazy kwadratowej odwracalnej macierzy A, jak i macierzy A^{-1}, są liczbami całkowitymi. Co stąd wynika o wyznaczniku A?

13. Uzasadnij, że dla ustalonej $A \in M_n(\mathbf{R})$ wyznacznik $\det(A - xE)$ jest wielomianową funkcją x stopnia n.

14. Udowodnij, że dla dowolnej macierzy $A = (a_{ij}) \in M_k(\mathbf{R})$ istnieje ciąg macierzy nieosobliwych $A_n = (a_{ij}^{(n)}) \in M_k(\mathbf{R})$ zbieżny do A. (Zbieżność oznacza, że dla każdej pary indeksów i, j ciąg $(a_{ij}^{(n)})_n$ ma granicę a_{ij}.)

15. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K, zaś $\phi\colon V \times V \to K$ funkcją dwuliniową.

a) Uzasadnij, że jeśli ϕ jest alternująca ($\phi(X, X) = 0$), to jest też ona antysymetryczna ($\phi(X, Y) = -\phi(Y, X)$).

b) Uzasadnij, że jeśli ϕ jest antysymetryczna oraz $1 + 1 \neq 0$, to ϕ jest alternująca.

16. Podaj przykład niezerowej funkcji $\Phi : M_{3\times 2}(K) \to K$, która jest wieloliniową i antysymetryczną funkcją kolumn; uzasadnij, że nie istnieje funkcja $\Psi : M_{2\times 3}(K) \to K$ o tych własnościach.

---

17. Wyznacz największą możliwą wartość wyznacznika 3×3, którego wszystkie wyrazy są co do wartości bezwzględnej nie większe od 1.

18. Udowodnij, że jeśli dla każdej pary $i \neq j$ zachodzi $(n-1)|a_{ij}| < |a_{ii}|$, to $\det(a_{ij}) \neq 0$.

19. Udowodnij, że jeśli dla pewnego $x \in \mathbf{R}$ zachodzi $\begin{vmatrix} f_1(x) & f_1'(x) & \dots & f_1^{(n-1)}(x) \\ f_2(x) & f_2'(x) & \dots & f_2^{(n-1)}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x) & f_n'(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$, to $f_1, \ldots, f_n$ są lnz (w przestrzeni wszystkich funkcji z $\mathbf{R}$ w $\mathbf{R}$).

20. Spróbuj użyć odpowiedniej wersji poprzedniego zadania do pokazania liniowej niezależności zbioru funkcji: (a) $\{x^n \mid n = 0, 1, \ldots\}$; (b) $\{\sin(nx) \mid n = 1, 2, \ldots\}$.

21. Pokaż, że $\det((x_i + y_j)^{-1}) = \Pi_{i>j}(x_i - x_j)(y_i - y_j)/\Pi_{i,j}(x_i + y_j)$. (Jest to tzw. wyznacznik Cauchy'ego.)