Algebra I, Lista 6

Dla tych, co jeszcze nie wiedzą.

2. Przedstaw w postaci $a+bi$: $\frac{(1+i)(2+i)(3+i)}{1-i}$, $\frac{1+i}{1-i}$, $\frac{1+i}{2-i}$, $\frac{1}{i^5}$, $\frac{1}{(-2+i)(1-3i)}$, $\frac{(4-5i)^2}{(2-3i)^2}$.
3. Zapisz w postaci trygonometrycznej/wykładniczej: -1, $1+i$, $-1-\sqrt{3}i$, $7-7i$, $-5+5\sqrt{3}i$.
4. Oblicz $\overline{(2+3i)\overline{(7-i)}}$.
5. Rozwiąż układy równań $(a)\begin{cases} z+iw=1 \\ iz+w=1+i \end{cases}$ $(b)\begin{cases} (1+i)z-iw=3+i \\ (2+i)z+(2-i)w=2i \end{cases}$
6. Udowodnij: (a) $|-z|=|z|$, (b) $|z/|z||=1$, (c) $\mathrm{Re}(iz)=-\mathrm{Im}(z)$, (d) $\mathrm{Im}(iz)=\mathrm{Re}(z)$,
7. Oblicz podane iloczyny posługując się postacią trygonometryczną:
   (a) $(1+i)(\sqrt{3}+i)$, (b) $(4+4i)(-3+3i)$, (c) $(10-10\sqrt{3}i)(2-2i)$, (d) $(\sqrt{3}+i)^{30}$.
8. Wyraź $\sin(5\phi)$ przez $\sin\phi$ i $\cos\phi$. [Wsk. Użyj wzoru de Moivre'a.]
9. Użyj postaci trygonometrycznej do obliczenia ilorazów:
   (a) $(2+2i)/(1-i)$, (b) $(1-\sqrt{3}i)/(\sqrt{3}+i)$, (c) $3i/(1+i)$.
10. Posługując się postacią trygonometryczną/wykładniczą oblicz i narysuj podane pierwiastki:
    (a) 3 stopnia z -1; (a) 6 stopnia z 27; (b) 4 stopnia z $-(1/2)-(\sqrt{3}/2)i$; (c) 8 stopnia z 1.

Dla wszystkich.

11. Rozwiąż (w $\mathbf{C}$):
    (a) $z^2-z+1=0$, (b) $z^2+3z+3-i=0$, (c) $z^2+(2i-1)z+1+5i=0$, (d) $z^2+iz=2$, (e) $2z+\overline{z}=6-5i$.
12. średnia arytmetyczna pewnych 200 liczb zespolonych wynosi 1. Udowodnij, że przynajmniej jedna z tych liczb ma moduł nie mniejszy niż 1.
13. Oblicz (a) $(1+i)^{1000}$; (b) $(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})^{24}$; (c) $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{129}$.
14. Rozłóż wielomian $P(z)$ na czynniki liniowe nad $\mathbf{C}$, a także na czynniki liniowe i nierozkładalne kwadratowe nad $\mathbf{R}$. Wykorzystaj fakt, że liczba a jest pierwiastkiem P.
    (a) $P(z)=z^3-2z^2-5z+6$, $a=-2$;
    (b) $P(z)=z^4-3z^3+3z^2-3z+2$, $a=i$;
    (c) $P(z)=z^5+2z^4+2z^3+10z^2+25z$, $a=1+2i$.
15. Napisz wielomian o współczynnikach rzeczywistych, taki że liczby 1, 2, $3+i$ są jego pierwiastkami.
16. Rozłóż wielomian $P(z)$ na czynniki liniowe nad $\mathbf{C}$, a także na czynniki liniowe i nierozkładalne kwadratowe nad $\mathbf{R}$.
    (a) $P(z)=z^6+27$;
    (b) $P(z)=z^4+4z^3+4z^2-4z-5$;
17. Rozwiąż równania: (a) $(z+1)^n-(z-1)^n=0$; (b) $(z+i)^n+(z-i)^n=0$.
18. Uzasadnij wzór $x^{2n+1}-1=(x-1)\Pi_{k=1}^n\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right)$. Znajdź analogiczny wzór dla $x^{2n}-1$.
19. Naszkicuj na płaszczyźnie zbiór zadany równaniem / nierównością:
    (a) $\frac{|z+1|}{|z-i|}=1$; (b) $\frac{|z+1|}{|z-i|}=2$; (c) $|\arg z|<\pi/3$; (d) $3<|z-2+i|<5$; (e) $-1<\mathrm{Re}(iz)<0$.
20. Narysuj zbiór $\{\frac{1+it}{1-it} : t\in\mathbf{R}\}$.
21. Wyznacz liczby zespolone odpowiadające parze przeciwległych wierzchołków kwadratu, jeśli pozostałym dwóm wierzchołkom odpowiadają liczby z oraz w.

Dla tych, co już wiedzą.

22. Uzasadnij (dla $z\neq 1$) wzór $1+z+z^2+\ldots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$. Dla $z=e^{ix}$ część rzeczywista tego wzoru da wzór na sumę $\sum_{k=0}^n\cos(kx)$, a część urojona da wzór na $\sum_{k=0}^n\sin(kx)$. Napisz te wzory; spróbuj przekształcić je do rzeczywistej postaci (tak, by w ostatecznej odpowiedzi były funkcje trygonometryczne, a nie eksponensy liczb urojonych).
23. Udowodnij, że $\Pi_{k=1}^n\cos\frac{2k\pi}{2n+1}=\pm 2^{-n}$; oraz że $\Pi_{k=1}^n\sin\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$. Znajdź analogiczne wzory dla $\Pi_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{n}$ oraz dla $\Pi_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}$.

24. W okrąg o promieniu 1 wpisano n-kąt foremny $A_1A_2\dots A_n$. Oblicz $|A_1A_2|\cdot|A_1A_3|\cdot\ldots\cdot|A_1A_n|$.
25. Oblicz $(5+i)^4(i-239)$. Wywnioskuj następujący wzór Machina:

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}.$$

Użyj tego wzoru i szeregu Taylora funkcji arctg by napisać liczbę wymierną q spełniającą $|\pi-q|<0{,}001$.
26. Udowodnij, że wielomian x^n+4 jest iloczynem dwóch wielomianów stopnia niższego o współczynnikach całkowitych wtedy i tylko wtedy, gdy n dzieli się przez 4.
27. Niech P będzie wielomianem o współczynnikach zespolonych. Udowodnij, że pierwiastki pochodnej P' leżą uwypukleniu zbioru pierwiastków P.
28. Niech $f(x)=a_1+a_2x+\ldots+a_nx^{n-1}$. Wykaż, że cyrkulant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$$

jest równy iloczynowi $f(\epsilon_1)f(\epsilon_2)\dots f(\epsilon_n)$, gdzie $\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_n$ są wszystkimi pierwiastkami z 1 stopnia n. (Wsk. pomnóż przez odpowiedni wyznacznik Vandermonde'a.)
29. Pomnożenie dwóch liczb zespolonych w postaci algebraicznej polega na wykonaniu czterech mnożeń i dwóch dodawań liczb rzeczywistych: $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$. Idąc w ślady Gaussa wymyśl inny wzór, wymagający tylko trzech mnożeń – kosztem zwiększenia liczby dodawań. (Odejmowanie traktujemy w tym zadaniu jak rodzaj dodawania.)

Dla macierzy $J\in M_n(K)$ określamy *wielomian charakterystyczny* $\chi_J(x)=\det(A-xE)$.
30. Załóżmy, że dla pewnej macierzy $J\in M_2(K)$ wielomian $\chi_J(x)$ nie ma pierwiastków w K. Udowodnij, że zbiór $\{A\in M_2(K)\mid AJ=JA\}$ (wyposażony w macierzowe dodawanie i mnożenie) jest ciałem.
31. Rozważmy ciało z poprzedniego zadania dla $K=\mathbf{Q}$ i $J=\left(\begin{smallmatrix}0&2\\1&0\end{smallmatrix}\right)$. Z jakim podciałem ciała $\mathbf{R}$ jest ono izomorficzne?