Algebra I. Lista 7

1. Napisz wiersz M. Białoszewskiego zaczynający się tak: "Ex Celu / Natchnielu / ..."
2. Czy $\mathbf{R}^3$ jest sumą prostą podprzestrzeni
 a) $\mathrm{Lin}(\{(1,2,3)^\top\}), \{(x,y,z)^\top : \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}\}, \{(t,0,0)^\top : t \in \mathbf{R}\}$?
 b) $\{(x,y,z)^\top : x+y+z=0\}, \{(x,y,z)^\top : \begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}\}$?
 c) $\mathrm{Lin}(\{(1,2,1)^\top, (-2,1,3)^\top\}), \mathrm{Lin}(\{(1,6,7)^\top\})$? d) $\{(x,y,z)^\top : x+2y-z=0\}, \mathrm{Lin}(\{(1,2,-1)^\top\})$?
3. Udowodnij, że (a) $M_{n\times n}(\mathbf{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbf{R}) : A^\top = A\} \oplus \{A \in M_{n\times n}(\mathbf{R}) : A^\top = -A\}$; (b) $M_{n\times n}(\mathbf{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbf{R}) : \mathrm{tr}(A) = 0\} \oplus \{tI : t \in \mathbf{R}\}$.
4. Pewne trzy proste w $\mathbf{R}^3$ przechodzące przez 0 mają tę własność, że kąt między każdymi dwoma z nich jest $> 60^\circ$. Czy wynika stąd, że $\mathbf{R}^3$ jest sumą prostą tych trzech prostych?
5. Niech $a(t) \in \mathbf{R}[t]$ będzie ustalonym wielomianem. Które z następujących funkcji są funkcjonałami liniowymi na $\mathbf{R}_n[t]$: (a) $f(P) = \int_{-1}^{1} a(t)P(t)dt$; (b) $f(P) = \int_0^1 a(t)P(t^2)dt$; (c) $f(P) = \int_0^1 a(t)[P(t)]^2dt$; (d) $f(P) = P'''(-1)$; (e) $f(P) = P(1)P'(-1)$.
6. Niech $V = \mathbf{R}[X]$, $W = \{P \in V \mid P(0) = 0\}$. Uzasadnij, że jeśli Q i S należą do tej samej warstwy W, to $Q(0) = S(0)$. Czy jest też odwrotnie? Uzasadnij, że w każdej warstwie W jest dokładnie jeden wielomian stopnia 0. Wyznacz $\dim(V/W)$.

---

7. Czy jest prawdą, że (w punkcie b przyjmujemy $\epsilon = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$)
 a) $\mathbf{R}_{12}[X] = \{P \in \mathbf{R}_{12}[X] : \text{stopień } P \text{ jest } \leq 6\} \oplus \{P \in \mathbf{R}_{12}[X] : \text{stopień } P \text{ jest } \geq 7\}$?
 b) $\mathbf{C}[X] = \{P \in \mathbf{C}[X] : P(\epsilon X) = P(X)\} \oplus \{P \in \mathbf{C}[X] : P(\epsilon X) = \epsilon P(X)\} \oplus \{P \in \mathbf{C}[X] : P(\epsilon X) = \epsilon^2 P(X)\}$?
8. Znajdź (jakąś) podprzestrzeń dopełniającą do $W < V$, jeśli (a) $V = \mathbf{R}^3$, $W = \mathrm{Lin}(\{(1,2,0)^\top, (0,1,1)^\top\})$; (b) $V = \mathbf{R}_4[X]$, $W = \{P \in \mathbf{R}_4[X] : P'(1) + 2P(0) = 0\}$; (c) $V = \mathbf{R}_3[X]$, $W = \{P \in \mathbf{R}_3[X] : \int_{-1}^1 P(x)dx = \int_{-1}^1 x^2 P(x)dx = 0\}$; (d) $V = \mathbf{R}_3[X]$, $W = \{P \in \mathbf{R}_3[X] : \int_{-1}^1 P(x)e^{-x^2}dx = 0\}$;
9. Podaj przykład podprzestrzeni $U, V, W < \mathbf{R}^4$, takich że $\mathbf{R}^4 = U \oplus V = V \oplus W = W \oplus U$.
10. Niech v_1, v_2, v_3 oraz w_1, w_2, w_3 będą bazami $\mathbf{R}^3$, zaś v^1, v^2, v^3 oraz w^1, w^2, w^3 bazami $(\mathbf{R}^3)^*$ do nich dualnymi. Przypuśćmy, że $v_2 = w_2$ oraz $v_3 = w_3$. Czy koniecznie musi być tak, że $v^2 = w^2$ i $v^3 = w^3$?
11. Uzasadnij, że jeśli $W < V$, $v \in V \backslash W$, to istnieje $f \in V^*$, takie że $f|_W = 0$, ale $f(v) \neq 0$.
12. Niech $\dim V < \infty$, niech B będzie bazą V, B^* – dualną do niej bazą V^*, B^{**} – dualną do B^* bazą V^{**}. Udowodnij, że $\varepsilon(B) = B^{**}$. ($\varepsilon: V \to V^{**}$ to naturalny izomorfizm.)
13. Niech $v_1, \ldots, v_k \in V$, $\phi^1, \ldots, \phi^k \in V^*$. Udowodnij, że jeśli $\det(\phi^i(v_j)) \neq 0$, to $v_1, \ldots, v_k$ są lnz w V, zaś $\phi^1, \ldots, \phi^k$ są lnz w V^*.
14. Niech $V = \mathbf{R}^3$, zaś W niech będzie prostą w $\mathbf{R}^3$ zadaną równaniem $x = \frac{y}{3} = -z$.
 a) Sprawdź, czy wektory $v_1 + W$, $v_2 + W$ są lnz w V/W, dla (i) $v_1 = (1,2,3)^\top$, $v_2 = (4,5,6)^\top$; (ii) $v_1 = (2,6,-2)^\top$, $v_2 = (0,1,2)^\top$; (iii) $v_1 = (-1,0,2)^\top$, $v_2 = (0,3,1)^\top$; (iv) $v_1 = (0,0,1)^\top$, $v_2 = (0,1,0)^\top$.
 b) Wskaż bazę B przestrzeni V/W i oblicz współrzędne wektorów v_1 i v_2 w tej bazie – dla wszystkich powyższych v_1, v_2.
15. Załóżmy, że $v, w \in \mathbf{R}^3$ są lnz. Jaki warunek musi spełniać jednowymiarowa podprzestrzeń $W < \mathbf{R}^3$, aby $v + W, w + W$ były lz w przestrzeni ilorazowej $\mathbf{R}^3/W$? Rozważ przykład $v = (1,1,0)^\top$, $w = (0,1,1)^\top$.
16. Uzasadnij, że jeśli $W < V$, $(b_1, \ldots, b_k)$ jest bazą W zaś $(b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n)$ bazą V, to $(b_{k+1}+W, \ldots, b_n+W)$ jest bazą V/W.

---

17. Udowodnij, że $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie z *zewnętrznej* sumy prostej w V dane przez $V_1 \oplus \ldots \oplus V_k \ni (v_1, \ldots, v_k) \mapsto v_1 + \ldots + v_k \in V$ jest izomorfizmem.
18. Niech $V_1, V_2 < V$, $\dim(V) < \infty$. Uzasadnij równoważność warunków:
 a) $V = V_1 \oplus V_2$;
 b) $V_1 \cap V_2 = 0$ i $V_1 + V_2 = V$;
 c) $V_1 \cap V_2 = 0$ i $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$;
 d) $V_1 + V_2 = V$ i $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$.

19. Niech $F\colon V \to W$ będzie liniowym przekształceniem, $\dim V, \dim W < \infty$. Definiujemy $F^*\colon W^* \to V^*$ wzorem $F^*(f) = f \circ F$. Sprawdź, że F^* jest przekształceniem liniowym. Sprawdź, że jeśli utożsamić V z V^{**} a W z W^{**} przez naturalne izomorfizmy ι, to $F^{**} = F$.
20. Niech $V, W < Z$. Pokaż, że $V/(V \cap W) \simeq (V + W)/W$. Wywnioskuj stąd (w przypadku skończenie wymiarowym) wzór $\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$.
21. Udowodnij, że prostokąta o niewspółmiernych bokach nie da się rozciąć na skończenie wiele kwadratów:

a) Niech jeden z boków prostokąta ma długość 1, a drugi ξ. Udowodnij, że istnieje $\phi \in \mathbf{R}^*$ (gdzie $\mathbf{R}$ traktujemy jako przestrzeń liniową nad $\mathbf{Q}$), takie że $\phi(1) = 1$, $\phi(\xi) = -1$.

b) Zdefiniujmy *ϕ-pole* prostokąta o bokach a, b jako iloczyn $\phi(a) \cdot \phi(b)$. Pokaż, że jeśli prostokąt rozciąć na skończenie wiele prostokątów, to suma ϕ-pól kawałków jest równa ϕ-polu wyjściowego prostokąta.

c) Konkluduj (nie wprost, z użyciem ϕ-pola).