Algebra I. Lista 8

Q jest zwykle formą kwadratową na skończenie wymiarowej przestrzeni V. Wektor $v \in V$ nazywamy *izotropowym,* jeśli $Q(v) = 0$. Zakładamy, że $1 + 1 \neq 0$. Formę kwadratową i jej formę biegunową często oznaczamy tą samą literą (którą zwykle jest Q).

1. Napisz sonet M.S. Szarzyńskiego "Pokój LibreOffice, lecz excelowanie / Byt nasz podniebny. ..."
2. Znajdź macierz formy Q w bazie B: $Q([x, y, z]) = x^2+5xy+3yz+yx-2z^2$, $B = ([1, 0, 1], [-1, -1, 1], [0, 1, 3])$.
3. Metodą Lagrange'a sprowadź do postaci diagonalnej formy $x_1x_2 + x_2^2$, $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3^2$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} x_ix_j$.
4. Dla jakich wartości λ następujące formy są dodatnio określone: $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$; $2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3$; $x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$; $x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$;
5. Uzasadnij, że jeśli $F\colon W \to V$ jest liniowe, zaś $Q\colon V \to K$ jest formą kwadratową, to $Q \circ F\colon W \to K$ jest formą kwadratową.
6. Podaj kryterium ujemnej określoności macierzy analogiczne do kryterium Sylvestera.

---

7. Uzasadnij, że dla dowolnej macierzy $A \in M_n(K)$ funkcja $K^n \ni v \mapsto {}^t vAv \in K$ jest formą kwadratową na K^n. Czy A jest macierzą tej formy w standardowej bazie?
8. Jak zmienia się baza przy diagonalizacji metodą Lagrange'a?

a) Załóżmy, że w pewnej bazie (b, c) forma ma postać $Q(xb+yc) = x^2+xy+y^2$. Zmieniamy wtedy współrzędne na $x' = x + \frac{1}{2}y$, $y' = y$. Wyraź przez b, c bazę (b', c') odpowiadającą tym nowym współrzędnym.

b) To samo dla $xy = (\frac{x+y}{2})^2 - (\frac{x-y}{2})^2 = (x')^2 - (y')^2$.

9. Wyznacz formę biegunową formy kwadratowej $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$.
10. Zbadaj dodatnią określoność form: (a) $\Phi(x, y) = {}^t xy$ ($\Phi\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$); $\Phi\colon M_{n\times n}(\mathbf{R}) \times M_{n\times n}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$: (b) $\Phi(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$, (c) $\Phi(A, B) = \mathrm{tr}(A{}^tB)$, $\Phi\colon \mathbf{R}_n[X] \times \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}$: (d) $\Phi(P_1, P_2) = P_1(2)P_2(1)$.
11. Znajdź sygnaturę formy: $x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3$; $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$; $2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$; $2x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$;
12. Uzasadnij, że każda forma kwadratowa na przestrzeni liniowej nad ciałem $\mathbf{C}$ ma w odpowiednio dobranym liniowym układzie współrzędnych postać $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2$ (dla pewnego k nie większego niż wymiar przestrzeni i zależącego od formy).
13. Symetryczne macierze 2×2 o wyrazach rzeczywistych tworzą przestrzeń liniową. Jaki jest jej wymiar? Zidentyfikuj i naszkicuj podzbiór tej przestrzeni składający się z macierzy dodatnio określonych.
14. Udowodnij lub obal: (a) Jeśli macierz 3×3 ma wszystkie wyrazy dodatnie, to jest dodatnio określona; (b) suma macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określona; (c) iloczyn macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określony.
15. Czy jest prawdą, że symetryczna macierz A jest dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej minory główne są nieujemne?
16. Podaj przykład formy kwadratowej Q na pewnej przestrzeni V oraz dwóch wektorów izotropowych $v, w \in V$, takich że $Q(v + w) \neq 0$.

---

17. Uzasadnij, że forma kwadratowa jest dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy jej macierz da się zapisać w postaci ${}^tMM$ dla pewnej macierzy M.
18. ($K = \mathbf{R}$) Załóżmy, że zbiór wektorów izotropowych jest podprzestrzenią. Wykaż, że wtedy (a) Q jest półokreślona; (b) jeśli $v, w \in V$, przy czym v jest wektorem izotropowym, to $Q(v, w) = 0$.
19. Formy kwadratowe Q, Q' na przestrzeni liniowej V nazywamy *liniowo równoważnymi,* jeśli istnieje odwracalne przekształcenie liniowe $F : V \to V$, takie że $Q' = Q \circ F$. Uzasadnij, że formy kwadratowe Q, Q' określone na rzeczywistej przestrzeni liniowej V są liniowo równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają tę samą sygnaturę.
20. Niech Φ będzie symetryczną niezdegenerowaną formą dwuliniową na (skończenie wymiarowej) przestrzeni liniowej V. Dla $W < V$ określmy $W^\perp = \{v \in V \mid (\forall w \in W)(Q(v, w) = 0)\}$. Niech $U, W < V$. Czy jest prawdą, że:

a) $V = U \oplus U^{\perp}$;
b) $(U^{\perp})^{\perp} = U$;
c) $(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$;
d) $(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

21. Jaki jest maksymalny możliwy wymiar izotropowej podprzestrzeni (tzn. podprzestrzeni, której każdy wektor jest izotropowy) w przestrzeni liniowej wymiaru n z formą kwadratową sygnatury (p, q)?

Zadanie bonusowe (6pkt.)

22. Ze skończonym grafem (niezorientowanym, bez krawędzi wielokrotnych, bez pętli), wiążemy macierz (a_{ij}): numerujemy wierzchołki grafu i kładziemy $a_{ij} = -1$ jeśli i-ty i j-ty wierzchołek są połączone krawędzią, $a_{ij} = 0$ jeśli nie są, oraz $a_{ii} = 2$ dla każdego i. Znajdź wszystkie grafy dla których dostaje się dodatnio określoną macierz.