Algebra I. Lista 9

Wszystkie przestrzenie liniowe rozważane na tej liście mają skończony wymiar. Dla liniowego $F\colon V \to W$ i baz: B przestrzeni V, C przestrzeni W; oznaczamy przez $m_C^B(F)$ macierz F w bazach B, C. Przez $[v]_B$ oznaczamy współrzędne wektora v w bazie B.

1. Tchnij nowe życie w pieśń starożytnego poety: "Excelli monumentum aere perennius..."
2. Niech macierzą przekształcenia $F\colon V \to W$ względem baz: (e_1, e_2, e_3) przestrzeni V i (f_1, f_2) przestrzeni W, będzie $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Wyznacz macierz F względem baz $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ i $(f_1, f_1 + f_2)$.
3. Rozważmy przekształcenie liniowe $F\colon \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}^3$ dane wzorem $F(P) = [P(-1), P'(0), P(1)]$. Niech $B = (1, X, X^2)$ będzie bazą $\mathbf{R}_2[X]$, zaś $E = (e_1, e_2, e_3)$ bazą standardową $\mathbf{R}^3$. (a) Znajdź $M_E^B(F)$. (b) Niech $C = (e_1 + 2e_3, e_3, e_2 + e_1)$. Znajdź $m_C^B(F)$. (c) Czy F jest odwracalne?
4. Wyznacz wielomian minimalny macierzy: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
5. Czy jest odwracalne przekształcenie $\mathbf{R}_{22}[X] \ni P \mapsto P'' + 3P' + 2P \in \mathbf{R}_{22}[X]$?
6. Sprawdź, że komutator macierzowy $[A, B] = AB - BA$ spełnia tożsamość Jacobiego.

---

7. Dla $v = [x, y, z] \in \mathbf{R}^3$ zdefiniujmy $M_v = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$. Sprawdź, że $[M_u, M_v] = M_{u \times v}$. Uzasadnij, że iloczyn wektorowy spełnia tożsamość Jacobiego.
8. Niech B, C, D będą bazami przestrzeni liniowych U, V, W odpowiednio. Niech też $F\colon V \to W$ i $G\colon U \to V$ będą przekształceniami liniowymi.
   a) Uzasadnij, że $m_D^B(F \circ G) = m_D^C(F) m_C^B(G)$.
   b) Niech B' będzie kolejną bazą U. Czy macierz $m_{B'}^B(\mathrm{Id}_U)$ jest macierzą przejścia z bazy B do B', czy może z bazy B' do B?
   c) Uzasadnij, że dla $u \in U$ zachodzą wzory $[u]_{B'} = m_{B'}^B(\mathrm{Id}_U)[u]_B$, $[G(u)]_C = m_C^B(G)[u]_B$.
9. Załóżmy, że $F\colon V \to W$ jest liniowe; niech C będzie dowolną bazą V, zaś D dowolną bazą W. Uzasadnij, że F jest izomorfizmem $\iff$ $m_D^C(F)$ jest odwracalna.
10. Podaj przykład macierzy $A \in M_2(\mathbf{R})$ o wielomianie minimalnym (a) $X^2 - 6X + 5$; (b) $X^2 - 4X + 4$; (c) $X^2 + 2X + 2$.
11. Podaj przykład podalgebry $\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ która nie jest postaci $\mathbf{R}[\mathcal{A}]$ dla żadnego $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$.
12. Niech $A \in M_2(K)$. Udowodnij, że wymiar algebry $K[A]$ (jako przestrzeni liniowej nad K) jest ≤ 2.
13. Niech $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$. Udowodnij, że $V = \ker \mathcal{P} \oplus \mathrm{Im}\mathcal{P}$. Udowodnij, że $\mathcal{P}$ jest rzutem.
14. Niech $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ będzie dane wzorem $F[x, y, z] = [2x + z, x + y + z, y - z]$.
    Niech $B = ([1, 0, 1], [0, 1, 0], [1, 1, 0])$. Znajdź (jeśli to możliwe) bazę C przestrzeni $\mathbf{R}^3$, taką że (a) $m_B^C(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $m_B^C(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
15. Wiadomo, że B, C, D to bazy $\mathbf{R}^3$, zaś $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Co więcej, $B = ([1, 1, 1], [0, 1, 1], [0, 1, 0])$, $m_D^C(F) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $m_B^C(F) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ -5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Znajdź D.
16. Załóżmy, że $B = (b_1, \ldots, b_n)$ jest bazą przestrzeni liniowej V. Niech $C = (c_1, \ldots, c_n)$ będą dane przez $c_j = \sum_i a_{ij} b_i$, dla pewnej macierzy $A \in M_{n \times n}(K)$. Udowodnij, że C jest bazą V wtedy i tylko wtedy, gdy A jest macierzą odwracalną.

---

17. Niech $F\colon V \to W$ będzie liniowe. Udowodnij, że istnieją bazy B, C przestrzeni V, W, takie że macierz $A = m_C^B(F)$ ma poza przekątną zera, a na przekątnej do pewnego miejsca jedynki, a dalej zera. (Dokładniej: $a_{ii} = 1$ dla $i \leq \dim \mathrm{Im(F)}$; $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$ oraz dla $i = j > \dim \mathrm{Im(F)}$.)

18. Załóżmy, że $A \in M_2(K)$ nie jest macierzą skalarną (nie jest postaci tE z $t \in K$). Udowodnij, że wtedy $\{B \in M_2(K) \mid AB = BA\} = K[A]$. Czy analogiczny fakt jest prawdziwy dla macierzy 3×3?
19. O $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ wiadomo, że $\mathcal{A}^2 - 3\mathcal{A} + 2\mathcal{E} = \mathcal{O}$. Niech $V_1 = \ker(\mathcal{A} - \mathcal{E})$, $V_2 = \ker(\mathcal{A} - 2\mathcal{E})$. Udowodnij, że $V = V_1 \oplus V_2$.
20. Niech $F\colon V \to W$ będzie liniowe, $\dim(V) = n$, $\dim(W) = k$. Niech też $A \in M_{k\times n}(K)$. Rozważmy pytanie: "Czy istnieją bazy: B przestrzeni V i C przestrzeni W, takie że $m_C^B(F) = A$?" Udowodnij, że odpowiedź na to pytanie jest pozytywna wtedy i tylko wtedy, gdy rząd $A = \dim \mathrm{Im(F)}$.
21. Dla $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ określmy formę liniową $f_{\mathcal{A}} \in \mathcal{L}(V)^*$ wzorem $f_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}) = \mathrm{tr}(\mathcal{A}\mathcal{X})$. Uzasadnij, że każda forma liniowa na $\mathcal{L}(V)$ jest postaci $f_{\mathcal{A}}$ dla odpowiednio dobranego $\mathcal{A}$.