Jeśli w zadaniu nie zaznaczono inaczej, o wszystkich przestrzeniach liniowych zakładamy, że mają skończony wymiar i są nad ciałem $\mathbb{R}$.

Kartkówka 1 z algebry liniowej B2, 2 marca 2005

Zadanie 1. Sprawdź odwołując się do definicji podprzestrzeni, że $W = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(-1) + P'(1) = 0\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{R}_3[X]$. Podaj przykład bazy W (bez uzasadniania).

Zadanie 2. Niech C będzie pięcioelementowym podzbiorem sześciowymiarowej przestrzeni liniowej V, takim że $\dim \mathrm{Lin}(C) = 2$. Uzasadnij, że istnieje baza B przestrzeni V, taka że $B \cap C$ jest zbiorem dwuelementowym.

Kartkówka 1 z algebry liniowej B2, 3 marca 2006

Zadanie 3. Sprawdź odwołując się do definicji podprzestrzeni, że

a) $W = \{P \in \mathbb{R}_7[X] : P(0)^2 + P'(1)^2 = 0\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{R}_7[X]$;

b) $W = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(0)^2 - P'(1)^2 = 0\}$ nie jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{R}_3[X]$.

Zadanie 4. Czy jest prawdą, że dla dowolnych podzbiorów A, B dowolnej przestrzeni liniowej V zachodzi zawieranie

$$\mathrm{Lin}(A \setminus B) \subseteq \mathrm{Lin}(A) \setminus \mathrm{Lin}(B) \quad ?$$

Kartkówka 2 z algebry liniowej B2, 10 marca 2006

Zadanie 5. Niech W będzie następującą podprzestrzenią $\mathbb{R}_{17}[X]$:

$$W = \left\{ P \in \mathbb{R}_{17}[X] : \int_0^1 P(x)dx + P'(1) = 2P(0) + 3P'(0) = 0 \right\}$$

Znajdź wymiar W.

Zadanie 6. Załóżmy, że $F\colon V \to W$ jest monomorfizmem, zaś $v_1, \ldots, v_n$ są wektorami z V, takimi że $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ są liniowo niezależne. Czy wynika stąd, że $v_1, \ldots, v_n$ są liniowo niezależne?

Kartkówka 3 z algebry liniowej B2, 17 marca 2004

Zadanie 7. Niech $f \in \mathbb{R}_2[X]^*$ będzie zadane wzorem $f(P) = \int_{-1}^{1}(1 + x)P(x)dx$.

a) Zapisz f jako kombinację liniową elementów bazy dualnej do bazy $(1 - X, X, X + X^2)$.

b) Uzasadnij, że $W = \{(P, f(P)) : P \in \mathbb{R}_2[X]\}$ jest podprzestrzenią produktu $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}$. Znajdź wymiar przestrzeni $(\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R})/W$.

c) Podaj przykład wielomianu $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, takiego że para $(Q, 0)$ należy do tej samej warstwy W co para $(X^2+1, 7)$. [W jest podprzestrzenią produktu $\mathbb{R}_2[X]\times\mathbb{R}$ zdefiniowaną w punkcie b).]

Kolokwium 1 z algebry liniowej B2, 2 kwietnia 2007

Zadanie 8. Znajdź bazę i wymiar następujących przestrzeni. Za każdym razem krótko uzasadnij, dlaczego podany przez Ciebie zbiór wektorów naprawdę jest bazą.

a) $\operatorname{Im} F_A$, gdzie $F_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ jest zadane macierzą $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\ker F_A$, gdzie $F_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ jest zadane macierzą $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

Zadanie 9. Czy podane pary przestrzeni liniowych są ze sobą izomorficzne? W każdym przypadku odpowiedź krótko uzasadnij.

a) $\{P \in \mathbb{R}_3[x] : P(1) = P(2)\}$ oraz $\{(x_1, \ldots, x_5) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$ oraz $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0\}$?

b) $\mathbb{R}^{10}$ oraz $\{P \in \mathbb{R}_{25}[x] : P(1) = P(2),\ P'(-2) + P''(5) = P(0),\ P(3) = 2P'(0),\ P(-1) + P(-2) = P''(0),\ P(1) + P(2) + P(3) = 0\}$

[Wskazówka: w punkcie b) nie trzeba nic liczyć]

Zadanie 10. Przekształcenie liniowe $f : V \to \mathbb{R}_2[x]$, gdzie $V = \{P \in \mathbb{R}_2[x] : P(-1) = 0\}$ zadane jest wzorem $f(P) = \frac{P}{x+1}$.

Podaj przykład przekształcenia liniowego $g : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ o tej własności, że $g|_V = f$ (to znaczy: podaj wzór na $g(ax^2 + bx + c)$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$).

Zadanie 11. Funkcjonały f_1, f_2 zadane są wzorami

$$f_1(P) = P(-1) + P(2), \qquad f_2(P) = P(0) + P'(0) \quad \text{dla dowolnego } P \in \mathbb{R}_1[x].$$

Stanowią one bazę $B = (f_1, f_2)$ przestrzeni $(\mathbb{R}_1[x])^*$.

(a) Znajdź bazę (P_1, P_2) przestrzeni $\mathbb{R}_1[x]$ o tej własności, że (f_1, f_2) jest bazą dualną do bazy (P_1, P_2)

(b) Oblicz $[f]_B$, gdzie $f \in (\mathbb{R}_1[x])^*$ zadany jest wzorem $f(P) = P(-2)$.

Zadanie 12. Płaszczyzna W zadana jest równaniem $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x + 2y + 3z = 0 \right\}$. Znajdź wszyskie wartości parametru α dla których $v = \alpha w$, gdzie $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + W \in \mathbb{R}^3/W$, $w = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + W \in \mathbb{R}^3/W$.

Zadanie 13. Funkcjonały $f_1, f_2, \ldots, f_{102} : \mathbb{R}_{100}[x] \to \mathbb{R}$ zadane są wzorami

$$f_1(P) = P(1), \quad f_2(P) = P(2), \ldots, \quad f_{102}(P) = P(102) \qquad \text{dla dowolnego } P \in \mathbb{R}_{100}[x]$$

a) Udowodnij, że $f_1, \ldots, f_{102} \in (\mathbb{R}_{100}[x])^*$ są liniowo zależne.

b) Udowodnij, że $f_1, \ldots, f_{101} \in (\mathbb{R}_{100}[x])^*$ są liniowo niezależne.

Kolokwium z algebry liniowej B2. 5 kwietnia 2004

Zadanie 14. Niech $F : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_1[X]$ będzie dane wzorem $F(P) = P'' + P(-1)X$.

a) Sprawdź, że F jest przekształceniem liniowym.

b) Wyznacz $\dim \ker(F)$ i znajdź jakąś bazę B przestrzeni $\ker(F)$.

c) Rozszerz B do bazy C przestrzeni $\mathbb{R}_3[X]$.

Zadanie 15. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. Dla których spośród następujących wektorów Y układ $AX = Y$ ma rozwiązanie: (a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$; (e) $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 27213 \\ 152 \\ 721 \end{bmatrix}$; (g) $\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$; (h) $\begin{bmatrix} -10 \\ -100 \\ 4 \end{bmatrix}$; (i) $\begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}$; (j) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$; (k) $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; (l) $\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$; (m) $\begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$; (n) $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$; (o) $\begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}$; (p) $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$; (r) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$; (s) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$; (t) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$; (u) $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$; (w) $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$; (x) $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$; (y) $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$; (z) $\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 7) \end{bmatrix}$.

Zadanie 16. Rozważmy funkcjonał liniowy ϕ na przestrzeni $\mathbb{R}_2[X]$, zadany przez $\phi(1) = \phi(X) = \phi(X^2) = 1$.

a) Oblicz $\phi((X-3)^2)$.

b) Podaj przykład wielomianu $P \in \mathbb{R}_2[X]$, takiego że $\phi(P) = -3$.

c) Czy jest prawdą, że jeśli $\phi(P) = \phi(Q)$, to liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $P - Q$? (Odpowiedź uzasadnij.)

Zadanie 17. Wiadomo, że $F : V \to W$, $G : W \to Z$ oraz $H : Z \to V$ są przekształceniami liniowymi, B jest bazą V, C jest bazą W, zaś D jest bazą Z. Ponadto wiadomo, że $H \circ G \circ F = \mathrm{Id}$, $m_D^B(G \circ F) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $m_B^C(H \circ G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Znajdź $m_C^D(F \circ H)$.

Kolokwium z algebry liniowej B2. 11 kwietnia 2005

O wszystkich przestrzeniach liniowych w niniejszym kolokwium zakładamy, że mają skończony wymiar i są nad ciałem $\mathbb{R}$.

Zadanie 18. Niech $W = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P'(1) = 0\}$. Niech $F : W \to \mathbb{R}_2[X]$ będzie dane wzorem $F(P) = P'(X)$.

a) Wskaż (jakąś) bazę B przestrzeni W.

b) Niech $C = (1, X^2, X)$. Znajdź $m_C^B(F)$.

c) Znajdź wymiar i podaj bazę $\mathrm{Im}(F)$.

Zadanie 19. W poniższych trzech przypadkach rozstrzygnij, czy W jest podprzestrzenią liniową V.

a) $V = \mathbb{R}_3[X]$; $W = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(1)^2 + P'(-1)^2 = 0\}$.

b) $V = (\mathbb{R}_2[X])^*$; $W = \{\phi \in (\mathbb{R}_2[X])^* : \phi(X+1) - 2\phi(X^2) = 1\}$.

c) $V = \mathbb{R}_3[X]/Z$, gdzie $Z = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P'(1) = P(-1) = 0\}$; $W = \{(tX^3 + X^2 - tX - 1) + Z : t \in \mathbb{R}\}$.

Zadanie 20. Niech $A = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : (\forall r \in \mathbb{R})(P(r) > 0)\}$. Wyznacz $\mathrm{Lin}(A)$. Odpowiedź podaj w takiej formie, by łatwo można było sprawdzić, czy dany wielomian należy do $\mathrm{Lin}(A)$; w szczególności łatwo sprawdź, które z następujących wielomianów należą do $\mathrm{Lin}(A)$: $2X^3 + X^2 - 3X + 7$, $-X^3 + 2X^2 - X$, $X^2 - 1$, $X^3 - 3X + 4$, $5X^3 - 17X^2 + 21X - 11$, $X^2 + 2X$, $7X$, 27, $7X^3 + 11X^2$, $X^3 - X^2 + X - 1$.

Zadanie 21. Znajdź niezerowy funkcjonał $\phi \in (\mathbb{R}^4)^*$, taki że $\phi(v) = 0$ dla wszystkich $v \in \mathrm{Im}(F_A)$ (lub udowodnij, że taki funkcjonał nie istnieje).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 22. Niech $F : V \to W$ będzie epimorfizmem, zaś $G : Z \to W$ przekształceniem liniowym. Udowodnij, że istnieje przekształcenie liniowe $H : Z \to V$, takie że $G = F \circ H$.

Zadanie 23. Niech $F, G : V \to W$ będą przekształceniemi liniowymi. Załóżmy, że dla każdej bazy B przestrzeni V istnieje $b \in B$, takie że $F(b) = G(b)$. Udowodnij, że $F = G$.

Kolokwium z algebry liniowej B2, 10 kwietnia 2006

Zadanie 24. Uzasadnij, że istnieje liczba rzeczywista x, taka że

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 9 & 5 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Zadanie 25. Niech $V = \mathbb{R}_{100}[X]$, $W = \{P \in V : P(1) = P(-1) = 0\}$.

a) Niech $E_1 = X^7 + 3X^5 + W$, $E_2 = X^8 + 24X^2 + W$ będą wektorami w przestrzeni V/W. Uzasadnij, że (E_1, E_2) jest bazą V/W.

b) Niech (E_1^*, E_2^*) będzie bazą dualną do bazy z podpunktu a). Oblicz $E_1^*(X^4 + 2X + 1 + W)$.

Zadanie 26. Podaj przykład przekształcenia liniowego $F\colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ o następującej własności: jeśli liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $P \in \mathbb{R}_2[X]$, to $F(P) = \frac{P(X)}{X-1}$. Opisz swój przykład podając macierz $m_C^B(F)$, dla następujących baz $\mathbb{R}_2[X]$: $B = (1, X, X^2)$, $C = (1, X-1, (X-1)^2)$.

Zadanie 27. O liczbach rzeczywistych a, b wiadomo, że przekształcenie $f\colon \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$f(P) = P(2) \cdot \int_0^1 \big(P(x) \cdot (x^2 + ax + b)\big) dx$$

jest liniowe. Znajdź a i b.

Zadanie 28. Czy jest prawdą, że dla dowolnej skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V i dowolnych przekształceń liniowych $F, G\colon V \to V$ zachodzi wzór: $\dim\ker(F \circ G) = \dim\ker(G \circ F)$? Podaj dowód lub kontrprzykład.

Zadanie 29. Czy istnieje odwzorowanie liniowe $F\colon \mathbb{R}^{100} \to \mathbb{R}^{100}$, takie że:

a) $\dim \operatorname{Im}(F) = 99$, $\dim \operatorname{Im}(F \circ F) = 97$?

b) $\dim \operatorname{Im}(F) = 98$, $\dim \operatorname{Im}(F \circ F) = 97$?

(Odpowiedź uzasadnij)

Kolokwium 1 z Algebry liniowej 2B, 11 kwietnia 2008

Zadanie 30. Wyznacz bazę i wymiar $\operatorname{Lin}(A)$ dla:

a) $A = \{(1,0,0,-1)^\top, (2,1,1,0)^\top, (1,1,1,1)^\top, (1,2,3,4)^\top, (0,1,2,3)^\top\}$;

b) $A = \{(1,1,1,1,0)^\top, (1,1,-1,-1,-1)^\top, (2,2,0,0,-1)^\top, (1,1,5,5,2)^\top, (1,-1,-1,0,0)^\top\}$.

Zadanie 31. Niech $W = \ker f$, gdzie przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}_{10}[x] \to \mathbb{R}^3$ zadane jest wzorem $f(P) = \begin{bmatrix} P(1) \\ P'(-1) \\ P(2) + P'(2) \end{bmatrix}$.

a) Znajdź wymiar W.

b) Uzasadnij, że wektory $U_1 = x^2 + 1 + W \in \mathbb{R}_{10}[x]/W$ oraz $U_2 = x^3 - x + W \in \mathbb{R}_{10}[x]/W$ są liniowo niezależne.

c) Wektory U_1, U_2 uzupełnij do bazy przestrzeni $\mathbb{R}_{10}[x]/W$. Uzasadnij krótko, dlaczego podane przez Ciebie wektory spełniają warunki zadania.

Zadanie 32. Przekształcenie liniowe $f : V \to \mathbb{R}_2[x]$, gdzie $V = \{P \in \mathbb{R}_2[x] : P(1) = 0\}$ zadane jest wzorem $f(P) = \frac{P}{x-1}$.

Podaj przykład przekształcenia liniowego $g : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ o tej własności, że $g|_V = f$ (to znaczy: podaj wzór na $g(ax^2 + bx + c)$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$).

Zadanie 33. Niech $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0 \right\}$, zaś $f, g \in W^*$ będą zadane są wzorami:

$$f \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x - y + z, \quad g \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x + y - z \qquad (\text{dla } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W).$$

a) Uzasadnij, że $B = (f, g)$ jest bazą przestrzeni W^*.

b) Niech $h \in W^*$ będzie zadany wzorem $h \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3x - 2y + z$ dla $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W$. Oblicz $[h]_B$.

c) Znajdź bazę (v, w) przestrzeni W, taką że (f, g) jest bazą do niej dualną.

Zadanie 34. Rozważmy funkcjonał liniowy ϕ na przestrzeni $\mathbb{R}_2[X]$, zadany przez $\phi(1) = \phi(X) = \phi(X^2) = 1$.

a) Oblicz $\phi((X-3)^2)$.

b) Podaj przykład wielomianu $P \in \mathbb{R}_2[X]$, takiego że $\phi(P) = -3$.

c) Czy jest prawdą, że jeśli $\phi(P) = \phi(Q)$, to liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $P - Q$? (Odpowiedź uzasadnij.)

Zadanie 35. O odwzorowaniu liniowym $F\colon \mathbb{R}^{100} \to \mathbb{R}^{100}$ wiadomo, że $\dim \mathrm{Im}(F) = 90$, a o odwzorowaniu liniowym $G\colon \mathbb{R}^{100} \to \mathbb{R}^{100}$ wiadomo, że $\dim \mathrm{Im}(G) = 80$. Udowodnij, że $\dim \mathrm{Im}(F \circ G) \geq 70$.

Kolokwium 2 z algebry liniowej B2, 8 maja 2007

Zadanie 36. Rozważamy następujący układ równań:

$$\begin{aligned} -a + b + c - 2d &= 3, \\ a - b + 2d &= 2, \\ -3b - 2c + 3d &= -1, \\ 3a + 2b - 2c + 2d &= 2. \end{aligned}$$

a) Rozwiąż powyższy układ przez obliczenie macierzy odwrotnej do macierzy głównej układu równań (za rozwiązania inną metodą nie będzie przyznany komplet punktów).

b) Oblicz wartość c korzystając ze wzorów Cramera (za rozwiązania nie korzystające ze wzorów Cramera nie będzie przyznany ani jeden punkt).

Zadanie 37. $B = (x^3 + x^2 + x + 1, x^3 - 2x^2 + 3x + 1, x^3 + 2x^2 + 3x + 4, x^3 - x^2 + x - 1)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$. Odwzorowanie liniowe $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ zadane jest wzorem $F(P) = P(x) + 2xP'(x) + P''(x)$. Oblicz $\det\left[m_B(F)\right]$.

Zadanie 38. Znajdź układ równań liniowych (uwaga! nie wymagamy, aby były to równania jednorodne!) składający się z minimalnej liczby równań i o tej własności, że jego zbiorem rozwiązań jest płaszczyzna w $\mathbb{R}^4$ przechodząca przez punkty $[1, 2, 4, 8]^T$, $[1, 1, 1, 1]^T$, $[1, -1, 1, -1]^T$.

Zadanie 39. Oblicz wyznacznik. Aby uniknąć nieporozumień, macierz została podana poniżej na dwa równoważne sposoby.

$$\det\left[(i^2 + j^2)_{1 \leq i,j \leq n}\right] = \begin{vmatrix} 1^2 + 1^2 & 1^2 + 2^2 & \cdots & 1^2 + n^2 \\ 2^2 + 1^2 & 2^2 + 2^2 & \cdots & 2^2 + n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2 + 1^2 & n^2 + 2^2 & \cdots & n^2 + n^2 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 40. O liczbach $t_1, \ldots, t_n$ zakładamy, że są parami różne i niezerowe. Oznaczmy $V = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^{n-1} \end{bmatrix}$ oraz $W = (w_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = V^{-1}$. Oblicz $w_{1,k}$. Odpowiedź podaj w możliwie prostej postaci.

Zadanie 41. Oblicz wyznacznik. Aby uniknąć nieporozumień, macierz została podana poniżej na dwa równoważne sposoby.

$$\det\left[(\max(i,j)_{1 \leq i,j \leq n}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

Kolokwium poprawkowe z algebry liniowej B2, 8 maja 2006

Zadanie 42. Oblicz wymiar przestrzeni

$$\left\{P \in \mathbb{R}_4[X] : P(-1) + P(1) = 0,\ P'(1) + P'(-1) = 0,\ P(1) + \frac{1}{3}P'''(0) = 0\right\}$$

Zadanie 43. Niech $F\colon \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ będzie dane wzorem $F(P(X)) = (X+X^2)\big(P''(X)+P(1)\big)$.

a) Wyznacz $m_C^B(F)$ dla $B = (X^3, X^2, X, 1)$ i $C = (1 + X, X + X^2, X^2 + X^3, X^3)$.

b) Zbiór $F^{-1}[\{X(1 + X)^2\}]$ jest warstwą pewnej podprzestrzeni W przestrzeni $\mathbb{R}_3[X]$. Wyznacz wymiar i bazę W.

Zadanie 44.

a) Niech (f, g) będzie bazą przestrzeni W^*, gdzie $W = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$, zaś f, g zadane są wzorami:

$$f \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x - y + z, \quad g \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x + y - z \qquad \left(\text{dla } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W\right).$$

Znajdź bazę (v, w) przestrzeni W, taką że (f, g) jest bazą do niej dualną.

b) Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową skończonego wymiaru. Czy każda baza przestrzeni V^* jest dualna do pewnej bazy V?

Zadanie 45. Niech $F\colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym i niech $A, B \subseteq V$. Udowodnij, że jeśli $\mathrm{Lin}(F[A]) = \mathrm{Lin}(F[B])$, to $\mathrm{Lin}(A) \subseteq \mathrm{Lin}(B) + \ker(F)$.

Zadanie 46. Znajdź ostatnią cyfrę liczby, która jest wartością bezwzględną wyznacznika

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -32 & 16 & -8 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 243 & 81 & 27 & 9 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Kolokwium 2 z Algebry liniowej 2B, 21 maja 2008

Zadanie 47.

a) Oblicz wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 101 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 101 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 101 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 101 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 101 \end{vmatrix}$$

b) Oblicz wyznacznik. Aby uniknąć nieporozumień, macierz została podana poniżej na dwa równoważne sposoby.

$$\det\left[\max(i^2, j^2)\right]_{1 \le i,j \le n} = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ 2^2 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ 3^2 & 3^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2 & n^2 & n^2 & \cdots & n^2 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 48. Symbolem $A^\vee$ oznaczamy dopełnienie algebraiczne macierzy A. Niech

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Oblicz $M^\vee$.
b) Oblicz $(M^\vee)^\vee$.

Zadanie 49. $B = (7x^3+2x^2+5x-3, 2x^3+6x^2-4x-2, 3x^3+5x^2-7x+8, 2x^3+3x^2+7x-4)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$. Odwzorowanie liniowe $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ zadane jest wzorem $F(P) = P(x) + 2xP'(x) + P''(x)$. Oblicz $\operatorname{tr}\left[m_B(F)\right]$.

Zadanie 50. Przestrzeń

$$V = \operatorname{Lin}([2,-1,3,4,-1]^T, [1,2,-3,1,2]^T, [5,-5,12,11,-5]^T, [1,-3,6,3,-3]^T)$$

opisz przy pomocy minimalnego układu równań liniowych.

Zadanie 51. Macierz A jest następującej postaci:

$$A = \begin{bmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 2 \\ n & n-1 & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ n & n-1 & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & n-1 \\ n & n & n & n & n & n \end{bmatrix},$$

zaś $B = A^{-1}$. Oblicz x, czyli zaznaczony poniżej wyraz macierzy B:

$$B = \begin{bmatrix} * & \cdots & * & x & * \\ * & \cdots & * & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & * & * \end{bmatrix}$$

Zadanie 52. Zasady łamigłówki *piętnastka* są następujące. W kwadratowym pudełku znajduje się 15 kwadratowych klocków oraz jedno puste miejsce, jak na poniższym schemacie z lewej strony. Gra polega na wielokrotnym wykonywaniu elementarnych ruchów. Elementarny ruch polega na przesunięciu jednego klocka w jednym z dopuszczalnych kierunków: góra, dół, lewo, prawo, jeśli odpowiednie sąsiadujące pole jest puste. Celem gry jest doprowadzenie planszy do konfiguracji jak na poniższym schemacie z prawej strony. Udowodnij, że osiągnięcie celu gry jest niemożliwe.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Kolokwium z algebry liniowej B2. 24 maja 2004

Zadanie 53. Oblicz wyznacznik $n \times n$:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 4 & 4 & 4 & \dots & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & \dots & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

Zadanie 54. Wyznacz

a) postać Jordana;

b) bazę jordanowską

przekształcenia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zadanego w bazie standardowej macierzą

$$\begin{bmatrix} 0 & -8 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 55. Niech $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie zadane w bazie standardowej macierzą

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

zaś W niech będzie płaszczyzną o równaniu $x + y - z = 0$.

a) Sprawdź, że W jest F-niezmienniczą podprzestrzenią $\mathbb{R}^3$.

b) Rozstrzygnij, czy istnieje F-niezmiennicza podprzestrzeń $\mathbb{R}^3$ dopełnicza do W.

Zadanie 56. Podaj przykład formy kwadratowej Q na przestrzeni $\mathbb{R}^3$, takiej że $Q(E_1) > 0$, $Q(E_2) > 0$, $Q(-E_3) > 0$, a sygnatura Q wynosi $(1, 2)$.

Zadanie 57. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią euklidesową (nad ciałem $\mathbb{R}$), zaś $v_1, v_2 \in V$ niech będą liniowo niezależne. Udowodnij, że istnieje podprzestrzeń $W < V$, taka że $P_W(v_1) = P_W(v_2) \neq 0$.

(Uwaga: sam rysunek nie wystarczy.)

Zadanie 58. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

gdzie $a_1, \dots, a_n$ są pewnymi liczbami zespolonymi. Udowodnij, że w postaci Jordana macierzy A każdej wartości własnej odpowiada dokładnie jedna klatka Jordana.

Kolokwium z algebry liniowej B2. 29 maja 2006

Zadanie 59. Oblicz wyznaczniki następujących macierzy (a_{ij}) rozmiaru $n \times n$:

a) $a_{ij} = \min(i, j)$;

b) $a_{ij} = \min(i^2, j^2)$.

Zadanie 60. Wskaż nieskończenie wiele podprzestrzeni F-niezmienniczych dla $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadanego macierzą

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 61. Zbadaj, czy forma kwadratowa $Q\colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$Q(P) = \int_{-1}^{1} P'(x)P(x)dx + 4P(0)^2 + 4P'(1)^2$$

jest dodatnio określona. Jeśli jest, znajdź bazę w której macierz formy jest diagonalna; jeśli nie jest, wskaż P takie że $Q(P) < 0$.

Zadanie 62. Niech $F\colon V \to W$ będzie liniowe i niech $W = W_1 \oplus W_2$. Czy jest prawdą, że
a) jeśli F jest monomorfizmem, to $V = F^{-1}[W_1] \oplus F^{-1}[W_2]$?
b) jeśli F jest epimorfizmem, to $V = F^{-1}[W_1] \oplus F^{-1}[W_2]$?
W każdym przypadku podaj dowód lub kontrprzykład.

Zadanie 63. Niech $N \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ będzie macierzą nilpotentną $[(\exists s \in \mathbb{N})(N^s = 0)]$. Definiujemy $\Phi\colon M_{n\times n}(\mathbb{C}) \to M_{n\times n}(\mathbb{C})$ wzorem $\Phi(A) = AN - NA$.
a) Sprawdź, że Φ jest liniowe.
b) Uzasadnij, że Φ nie jest epimorfizmem.
c) Wyznacz wartości własne Φ.
d) Udowodnij, że w postaci Jordana Φ jest więcej niż $\frac{n}{2}$ klatek.

Kolokwium 3 z algebry liniowej B2, 11 czerwca 2007

Zadanie 64. Znajdź postać Jordana (nie musisz wyznaczać odpowiedniej bazy jordanowskiej) podanej macierzy A. Wskazówka: niewidzialna ręka już obliczyła wielomian charakterystyczny $\chi_A(x)$, masz prawo skorzystać z tej informacji.
a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \chi_A(x) = (1-x)^3$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \chi_A(x) = (1-x)^4$$

Zadanie 65. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ niewidzialna ręka obliczyła już postać Jordana, jest nią mianowicie $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. W swoim rozwiązaniu możesz korzystać z tej informacji.
a) Oblicz A^k.
b) Oblicz $\exp(A)$

Zadanie 66. Określmy formę kwadratową $Q : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ wzorem $Q(P) = 2\int_0^1 P'(x)P(x)dx$.

a) Wyznacz formę dwuliniową $Q : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ odpowiadającą powyższej formie kwadratowej (to znaczy: podaj wzór na $Q(ax^2 + bx + c, dx^2 + ex + f)$).

b) Niech $B = (1, X, X^2)$. Wyznacz $m^{BB}(Q)$.

c) Oblicz sygnaturę Q.

Wskazówka dla osób z zaniedbaną analizą: $\int x^m \, dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1}$.

Wskazówka ułatwiająca przygotowanie się do kolokwium: znajdź to zadanie wśród zadań z poprzednich lat.

Zadanie 67.

a) Udowodnij, że nie istnieje odwzorowanie liniowe $P : \mathbb{R}^{100} \to \mathbb{R}^{100}$ o tej własności, że $\dim \operatorname{Im} P = 99$ oraz $\dim \operatorname{Im} P^2 = 97$.

a) Podaj przykład odwzorowania liniowego $P : \mathbb{R}^{100} \to \mathbb{R}^{100}$ o tej własności, że $\dim \operatorname{Im} P = 98$ oraz $\dim \operatorname{Im} P^2 = 97$.

Wskazówka ułatwiająca przygotowanie się do kolokwium: znajdź to zadanie wśród zadań z poprzednich lat.

Zadanie 68. Przez $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznaczamy standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$. Dla jakich wartości parametru t istnieją w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ liniowo niezależne wektory v_1, v_2, v_3 z których każdy ma długość 1, $\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{2}{3}$, $\langle v_1, v_3 \rangle = -\frac{1}{2}$, $\langle v_2, v_3 \rangle = t$.

Wskazówka: macierze/formy dodatnio określone mogą pomóc.

Uwaga: jeśli masz kłopot z tym zadaniem, możesz usunąć założenie o liniowej niezależnoći. Nie jest karane to obcięciem punktów.

Zadanie 69. Niech $Q : \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ będzie formą dwuliniową, która jest antysymetryczna (to znaczy: $Q(v, w) = -Q(w, v)$ zachodzi dla dowolnych $v, w \in \mathbb{R}^5$). Udowodnij, że istnieje taki NIEZEROWY wektor $v \in \mathbb{R}^5$, że $Q(v, w) = 0$ zachodzi dla dowolnego $w \in \mathbb{R}^5$.

Kolokwium 3 z Algebry liniowej 2B, 13 czerwca 2008

Zadanie 70. Odwzorowanie $F : \mathbb{R}_5[X] \to \mathbb{R}_5[X]$ zadane jest wzorem

$$F(P) = P(3X + 1).$$

Wyznacz wielomian charakterystyczny, wartości własne. Wyznacz przestrzenie własne i przestrzenie pierwiastkowe (to znaczy—na przykład—wyznacz ich bazy).

Zadanie 71. Oblicz wyznacznik macierzy $n \times n$ postaci

$$\begin{bmatrix} & & & & 2 \\ & & & 2 & \\ & & \cdots & & \\ & 2 & & & \\ 2 & & & & \end{bmatrix},$$

gdzie puste miejsca oznaczają zera, jeśli a) $n = 60$, b) $n = 61$, c) $n = 62$, d) $n = 63$.

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 72. Wyznacz postać Jordana poniższej macierzy (uwaga: wyznaczenie bazy jordanowskiej nie jest wymagane):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -6 & -10 & -4 & 6 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 2 & -3 & -1 & -2 \\ -4 & 23 & 22 & 9 & -8 & 6 & -11 \\ -2 & 11 & 12 & 4 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 6 & 3 & -5 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & -4 & -1 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Wskazówka: niewidzialna ręka obliczyła już wielomian charakterystyczny tej macierzy; jest nim $\chi_A(x) = (2-x)^7$. Ponadto niewidzialna ręka informuje, że:

bazą przestrzeni $\ker(A-2)$ jest $([-1,1,-1,-1,-1,-1,-0]^T,\ [0,-1,1,2,1,1,1]^T,\ [-2,1,-2,0,-1,-1,-1]^T)$,

bazą przestrzeni $\ker(A-2)^2$ jest $([-1,1,-1,-1,-1,-1,-0]^T,\ [0,-1,1,2,1,1,1]^T,\ [1,1,-1,-0,0,-1,-1]^T,\ [-2,1,-2,0,-1,-1,-1]^T,\ [0,0,1,-2,-1,1,2]^T)$,

bazą przestrzeni $\ker(A-2)^3$ jest $([-1,1,-1,-1,-1,-1,-0]^T,\ [0,-1,1,2,1,1,1]^T,\ [1,1,-1,-0,0,-1,-1]^T,\ [-2,1,-2,0,-1,-1,-1]^T,\ [0,0,1,-2,-1,1,2]^T,\ [1,1,-0,1,-0,-1,2]^T)$.

W swoim rozwiązaniu możesz wykorzystać informacje niewidzialnej ręki.

Zadanie 73. Znajdź postać Jordana poniższej macierzy A oraz bazę, w której jest ona przyjmowana.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 & 5 \\ -10 & -2 & 12 & -14 \\ -9 & -4 & 12 & -11 \\ -7 & -3 & 8 & -7 \end{bmatrix}$$

Wskazówka: niewidzialna ręka obliczyła, że $\chi_A(x) = (2-x)^4$. W swoim rozwiązaniu możesz wykorzystać informacje niewidzialnej ręki.

Zadanie 74. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele F_A-niezmienniczych, dwuwymiarowych przestrzeni dla odwzorowania $F_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zadanego macierzą

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 75. Oblicz $\sin(\pi A)$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} -12 & -32 & 23 \\ 1 & 5 & -2 \\ -7 & -15 & 13 \end{bmatrix}.$$

Wskazówka: niewidzialna ręka obliczyła $\chi_A(x) = (2-x)^3$. Możesz skorzystać z informacji niewidzialnej ręki.

Egzamin z algebry liniowej B2, 24 czerwca 2004

Zadanie 76. Niech f będzie funkcjonałem liniowym na $\mathbb{R}^3$, takim że $m^B_{\{1\}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, gdzie $B = (E_3, E_2+E_3, E_1+E_2+E_3)$. Wyznacz $m^E_{\{1\}}(f)$ dla $E = (E_1, E_2, E_3)$.

Zadanie 77. Znajdź rozkład biegunowy macierzy $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 78. Niech W będzie podprzestrzenią $\mathbb{R}^4$ zadaną układem $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.
Znajdź dwie podprzestrzenie $V_1, V_2 < \mathbb{R}^4$, takie że $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus W = V_2 \oplus W = V_1 \oplus V_2$ — lub udowodnij, że podprzestrzenie o tej własności nie istnieją.

Zadanie 79. Określmy funkcję $Q : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ wzorem $Q(P) = 2\int_0^1 P'(x)P(x)dx$.

a) Sprawdź, że Q jest formą kwadratową.

b) Niech $B = (1, X, X^2)$. Wyznacz $m^{BB}(Q)$.

c) Oblicz sygnaturę Q.

Zadanie 80. Podaj przykład niediagonalizowalnej macierzy $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$, takiej że przestrzenie $\mathrm{Lin}(\{E_1, E_2 - E_3\})$ oraz $\mathrm{Lin}(\{E_2 + E_3, E_4\})$ są F_A-niezmiennicze, podczas gdy $\chi_A(x) = (3 - x)^3(1 - x)$. (Sprawdź żądane własności.)

Zadanie 81. Znajdź postać Jordana macierzy $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

Zadanie 82. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią euklidesową, zaś $P : V \to V$ przekształceniem liniowym, takim że $P^2 = P$.

a) Udowodnij, że $V = \ker(P) \oplus \mathrm{Im}(P)$.

b) Udowodnij równoważność: $P = P^* \iff \ker(P) \perp \mathrm{Im}(P)$.

Zadanie 83. Niech Z będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową, zaś V i W jej podprzestrzeniami.

a) Uzasadnij, że $\overline{V} := \{v + W : v \in V\}$ jest podprzestrzenią Z/W.

b) Udowodnij, że $\dim \overline{V} = \dim V - \dim(V \cap W)$.

Egzamin zerowy z algebry liniowej B2, 21 czerwca 2007

Zadanie 84. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ odwzorowanie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} x + 2y & \text{jeśli } x + y = 0, \\ ax + 3y & \text{jeśli } x + y \neq 0 \end{cases}$$

jest odwzorowaniem liniowym?

Zadanie 85 (6+6=12 punktów). Płaszczyzna π zadana jest równaniem $\pi = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : z = 1 \right\}$.
Przekształcenie liniowe $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ma tę własność, że $P(\pi) = \pi$.

- Udowodnij, że P jest odwracalne.

- Udowodnij, że jedną z wartości własnych P jest 1.

Zadanie 86. Niech $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ będzie dane wzorem $F(P) = P'' + P(1)x$.

a) Wyznacz $\dim \ker(F)$ i znajdź jakąś bazę B przestrzeni $\ker(F)$.

b) Rozszerz B do bazy C przestrzeni $\mathbb{R}_3[X]$.

c) Napisz macierz $m_D^C(F)$, jeśli $D = (2, x-1)$ jest bazą $\mathbb{R}_1[x]$.

Zadanie 87. Podaj przykład niediagonalizowalnej macierzy $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$, takiej że przestrzenie $\mathrm{Lin}(e_1, e_2 + e_3)$ oraz $\mathrm{Lin}(e_2 - e_3, e_4)$ są F_A-niezmiennicze, podczas gdy $\chi_A(x) = (1-x)^3(2-x)$. (Sprawdź żądane własności.)

Zadanie 88. Oblicz wielomian charakterystyczny macierzy

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & f \end{bmatrix}.$$

Zadanie 89. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ zawarta jest prosta $k = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ oraz prosta $\ell = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$. Oblicz odległość pomiędzy prostymi k i ℓ.

Przypomnienie: odległość pomiędzy k i ℓ definiujemy jako minimum $d(x,y)$, gdzie $x \in k$ oraz $l \in \ell$, zaś $d(x,y)$ oznacza odległość punktów x i y.

Zadanie 90 (4+8=12 punktów).

- O trójkącie PQR (gdzie $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$) wiadomo, że jego długości boków wynoszą: $|PQ| = 2$, $|QR| = 3$, $|PR| = 4$. Oblicz iloczyn skalarny $\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR} \rangle$.
- Dla jakich wartości parametru t istnieją punkty $P, Q, R, S \in \mathbb{R}^3$ nie leżące na jednej płaszczyznie i o tej własności, że $|PQ| = 2$, $|QR| = 3$, $|PR| = 4$, $|PS| = 3$, $|QS| = 2$, $|RS| = t$.

Zadanie 91. O odwzorowaniu $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wiadomo, że ma wyłącznie rzeczywiste wartości własne oraz że diagonalizuje się (nad ciałem $\mathbb{R}$).

Udowodnij, że istnieje baza ortonormalna B przestrzeni $\mathbb{R}^n$ o tej własności, że $m_B(P)$ jest macierzą górnotrójkątną.

Egzamin z Algebry liniowej 2B, 26 czerwca 2008

Zadanie 92. Oblicz wymiar przestrzeni

$$\left\{ P \in \mathbb{R}_4[X] : P(-1) + P(1) = 0,\ P'(1) + P'(-1) = 0,\ P(1) + \frac{1}{3}P'''(0) = 0 \right\}.$$

Zadanie 93. Niech $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie zadane w bazie standardowej macierzą

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

zaś W niech będzie płaszczyzną o równaniu $x + y - z = 0$.

a) Sprawdź, że W jest F-niezmienniczą podprzestrzenią $\mathbb{R}^3$.

b) Rozstrzygnij, czy istnieje F-niezmiennicza podprzestrzeń $\mathbb{R}^3$ dopełnicza do W.

Zadanie 94. Przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}_{10}[x] \to \mathbb{R}^3$ zadane jest wzorem $f(P) = \begin{bmatrix} P(1) \\ P'(-1) \\ P(2) + P'(2) \end{bmatrix}$.

Uzasadnij, że wektory $x^2 + 1 + \ker f, x^3 - x + \ker f \in \mathbb{R}_{10}[x]/\ker f$ są liniowo niezależne. Następnie uzupełnij je do bazy przestrzeni $\mathbb{R}_{10}[x]/\ker f$. Odpowiedź krótko uzasadnij.

Zadanie 95. Niech f będzie funkcjonałem liniowym na $\mathbb{R}^3$, takim że $m^B_{\{1\}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, gdzie $B = (E_3, E_2 + E_3, E_1 + E_2 + E_3)$. Wyznacz $m^E_{\{1\}}(f)$ dla $E = (E_1, E_2, E_3)$.

Zadanie 96. Niech W będzie podprzestrzenią $\mathbb{R}^4$ zadaną układem $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = 0 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & = 0 \end{cases}$.

Znajdź dwie podprzestrzenie $V_1, V_2 < \mathbb{R}^4$, takie że $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus W = V_2 \oplus W = V_1 \oplus V_2$ — lub udowodnij, że podprzestrzenie o tej własności nie istnieją.

Zadanie 97.

a) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x) + txf'(x) + f'(x) = x^3 + 4x^2 - 7x + 9$$

jest spełniane przez dokładnie jeden wielomian $f \in \mathbb{R}_5[x]$?

b) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ równanie

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + txz, \qquad \text{gdzie } x, y, z \in \mathbb{R}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$?

Zadanie 98. Przestrzeń $V = \{f \in \mathbb{R}_4[X] : f(0) = f(1) = 0\}$ wyposażono w formę dwuliniową

$$Q(f, g) = -\int_0^1 f(x)g''(x)\, dx.$$

a) Uzasadnij, że Q jest iloczynem skalarnym.

b) Wyznacz pole równoległoboku rozpiętego przez wektory $x(x-1), x^2(x-1)$ w przestrzeni euklidesowej V z iloczynem skalarnym Q.

Zadanie 99. O macierzy $A \in M_3(\mathbb{R})$ wiadomo, że się nie diagonalizuje, oraz że jej wielomian charakterystyczny ma postać $\chi_A(x) = (1 - x)(2 - x)^2$. Podaj przykład wielomianu P o tej własności, że $P(A) = \sin(\pi A)$. Odpowiedź uzasadnij.

Egzamin z algebry liniowej B2, 2 lipca 2007

Zadanie 100. Przestrzenie $U = \mathrm{Lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix} \right\}$, $V = \mathrm{Lin}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix} \right\}$ są podprzestrzeniami $\mathbb{R}^4$.

- Wyznacz bazę $U + V$.
- Wyznacz bazę $U \cap V$.

Zadanie 101. Funkcjonał $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zadany jest wzorem $\phi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = x + 2y - z$. Oznaczmy $V = \ker \phi$. Funkcjonał $f : V \to \mathbb{R}$ zadany jest wzorem $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = x+y$, a funkcjonał $g : V \to \mathbb{R}$ zadany jest wzorem $g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = y + 2z$.

- Uzasadnij, że $B = (f, g)$ jest bazą V^*.
- Funkcjonał $h : V \to \mathbb{R}$ zadany jest wzorem $h\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = x + y + z$. Oblicz $[h]_B$, gdzie $B = (f, g)$.

Zadanie 102. Oznaczamy $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathrm{Lin}\left([1, 3, 4]^T\right)$. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ wektory

$$(2, 3, t)^T + W, \quad (1, 1, 3)^T + W \quad \in V/W$$

są liniowo zależne?

Zadanie 103. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x) + txf'(x) + f'(x) = x^3 + 4x^2 - 7x + 9$$

jest spełniane przez dokładnie jeden wielomian $f \in \mathbb{R}_5[x]$?

Zadanie 104. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ równanie

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + txz, \qquad \text{gdzie } x, y, z \in \mathbb{R}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$?

Zadanie 105. Czworościan $ABCD$ ma wierzchołki $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- Oblicz pole ściany BCD.
- Oblicz objętość czworościanu $ABCD$.
- Oblicz wysokość (to znaczy: jej długość) czworościanu $ABCD$ poprowadzoną z wierzchołka A.

Zadanie 106. $Q : \mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}$ jest funkcją dwuliniową i antysymetryczną (to znaczy: $Q(u, v) = -Q(v, u)$ zachodzi dla dowolnych $u, v \in \mathbb{R}^{10}$). O wektorach $p, q \in \mathbb{R}^{10}$ wiadomo, że $Q(p, q) \neq 0$.
Udowodnij, że

$$\mathbb{R}^{10} = \mathrm{Lin}(p, q) \oplus \left\{v \in \mathbb{R}^{10} : Q(p, v) = Q(q, v) = 0\right\}.$$

Zadanie 107. O macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$ wiadomo, że jest macierzą dodatnio określoną (tzn. jest macierzą formy dodatnio określonej). Udowodnij, że istnieje macierz górnotrójkątna $B \in M_n(\mathbb{R})$ o tej własności, że $A = B^T B$.

Data kompilacji: 12 sierpnia 2008