1. Rozważmy funkcjonał liniowy ϕ na przestrzeni $\mathbf{R}_2[X]$, zadany przez $\phi(1) = \phi(X) = \phi(X^2) = 1$.
   a) (5 pkt) Oblicz $\phi((X-3)^2)$.
   b) (5 pkt) Podaj przykład wielomianu $P \in \mathbf{R}_2[X]$, takiego że $\phi(P) = -3$.
   c) (10 pkt) Czy jest prawdą, że jeśli $\phi(P) = \phi(Q)$, to liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $P - Q$? (Odpowiedź uzasadnij.)

2. (20 pkt) Rozważmy przestrzeń $C([0,1])$ funkcji ciągłych na przedziale $[0,1]$ z iloczynem skalarnym $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Niech $p(x) = 1$, $q(x) = x^2$, $r(x) = x$. Znajdź odległość r od $Lin(\{p, q\})$

3. W $\mathbf{R}^4$ rozważmy podprzestrzeń

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \}.$$

   a) (2 pkt) Sprawdź, że $X = (1, 0, -1, 0)^\top$ należy do W.
   b) (6 pkt) Uzupełnij $\{X\}$ do bazy W (tzn. znajdź bazę W, do której należy X).
   c) (6 pkt) Znajdź podprzestrzeń V przestrzeni $\mathbf{R}^4$ dopełniczą do W. (Opisz ją układem równań.)
   d) (6 pkt) Znajdź bazę V.

4. Rozważmy przekształcenie liniowe $F : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}^3$ dane wzorem $F(P) = \begin{pmatrix} P(-1) \\ P'(0) \\ P(1) \end{pmatrix}$. Niech $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ będzie bazą $\mathbf{R}_2[X]$, zaś $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, E_3\}$ bazą standardową $\mathbf{R}^3$.
   a) (6 pkt) Znajdź $M_{\mathcal{BE}}(F)$.
   b) (10 pkt) Niech $\mathcal{C} = \{E_1 + 2E_3, E_3, E_2 + E_1\}$. Znajdź $m_{\mathcal{BC}}(F)$.
   c) (4 pkt) Czy F jest odwracalne? (Odpowiedź uzasadnij)

5. Niech V będzie przestrzenią euklidesową skończonego wymiaru, $\mathcal{B}$ – jej bazą ortonormalną. Niech W będzie podprzestrzenią V, zaś $M = m_{\mathcal{B}}(P_W)$ (P_W – rzut prostopadły na W).
   a) (10 pkt) Uzasadnij, że jeśli $b \in \mathcal{B}$, to $\|P_W(b)\| \leq 1$.
   b) (10 pkt) Uzasadnij, że żaden z wyrazów macierzy M nie jest większy niż 1.

5. (20 pkt) Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi, $\dim V = 20$, $\dim W = 17$, zaś $F : V \to W$ oraz $G : W \to V$ niech będą przekształceniami liniowymi. Uzasadnij, że $\det(G \circ F) = 0$.

6. Niech V, W będą podprzestrzeniami $\mathbf{R}^5$, takimi że $\dim V = 3$, $\dim W = 4$.
   a) (10 pkt) Uzasadnij, że $V \cap W \neq \{O\}$.
   b) (10 pkt) Czy każda warstwa V musi mieć niepusty przekrój z W? (Odpowiedź uzasadnij.)

8. (20 pkt) O pewnych permutacjach $\alpha, \beta \in S_{10}$ wiadomo, że iloczyn $\alpha\beta\alpha^{-1}$ jest permutacją parzystą. Czy β może być permutacją nieparzystą? (Odpowiedź uzasadnij.)