Egzamin z topologii, część bardzo łatwa

1. Rozstrzygnij, czy wiązka Hopfa ma ciągłe cięcie.
   [*Wiązka Hopfa* to $\pi : S^3 \to S^2 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, $\pi(z,w) = z/w$; przyjmujemy tu $S^3 = \{(z,w) \in \mathbf{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$, $z/0 = \infty$, S^2 to jednopunktowe uzwarcenie $\mathbf{C}$. Odwzorowanie $c : S^2 \to S^3$ jest *cięciem* π, jeśli $\pi \circ c = id$.]
2. Niech X oznacza przestrzeń wszystkich okręgów na sferze S^2 (w tym tych o promieniu 0. Opisz (zdefiniuj) naturalną topologię na X. Uzasadnij, że X jest spójną trójwymiarową rozmaitością z brzegiem. Wylicz $\pi_1(X)$.
3. W tym zadaniu *powierzchnia* to zawsze zwarta powierzchnia bez brzegu, strianguloWana skończoną liczbą trójkątów.
   a) Udowodnij, że jedyną jednospójną powierzchnią jest S^2.
   b) Udowodnij, że jeśli stożek nad powierzchnią F jest trójwymiarową rozmaitością (z brzegiem), to $F = S^2$.
   c) Udowodnij, że jeśli M jest trójwymiarową rozmaitością (bez brzegu, strianguloWaną skończoną liczbą czworościanów), to $\chi(M) = 0$.
4. Dla $f : S^1 \to S^1$ określamy *stopień* f jako liczbę całkowitą n, taką że $f_* : \pi_1(S^1) = \mathbf{Z} \ni z \mapsto nz \in \mathbf{Z} = \pi_1(S^1)$.
   a) Udowodnij, że każde ciągłe $f : S^1 \to S^1$ rozszerza się do ciągłego $F : D \to D$. [$D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\}$]
   b) Udowodnij, że jeśli stopień f jest różny od 0, to rozszerzenie F koniecznie jest na.
   c) Udowodnij, że jeśli stopień f wynosi 0, to istnieje rozszerzenie F które nie jest na.
5. Niech $GL_n(\mathbf{C}) = \{g \in M_{n\times n}(\mathbf{C}) \mid \det(g) \neq 0\}$ z wiadomą topologią.
   a) Uzasadnij, że $GL_n(\mathbf{C})$ jest drogowo spójna.
   b) Niech $m \in GL_n(\mathbf{C})$ będzie pewną ustaloną macierzą. Na $[0,1]\times GL_n(\mathbf{C})$ określmy relację równoważności:

$$(x,g) \sim (y,h) \iff (x = y \wedge g = h) \vee (\{x,y\} = \{0,1\} \wedge m^{-x}g = m^y h).$$

   Udowodnij, że $[0,1] \times GL_n(\mathbf{C})/\!\sim$ jest homeomorficzna z $S^1 \times GL_n(\mathbf{C})$.