Egzamin poprawkowy z algebry liniowej 2A, 9.IX.2003

Należy wybrać i rozwiązać sześć z poniższych ośmiu zadań. Powodzenia!

1. (20 pkt) Niech $V = Lin(\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\3\\5\end{pmatrix}\})$ będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbf{R}^4$.

   Znajdź liniowy układ równań, którego zbiorem rozwiązań jest warstwa $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + V$.

2. Niech $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\}$ będzie bazą $\mathbf{R}^3$, zaś $\mathcal{C} = \{1+X, X-X^2, 2+X^2\}$ bazą $\mathbf{R}_2[X]$. Niech $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}_2[X]$ będzie przekształceniem liniowym, zadanym względem baz $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ macierzą

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

   a) (5 pkt) Uzasadnij, że F jest izomorfizmem.
   b) (15 pkt) Oblicz $F^{-1}(1+X+X^2)$.

3. Niech $Q(x,y,z) = x^2 + 2axy + 2y^2 + 2yz + az^2$ będzie formą kwadratową, gdzie a jest parametrem rzeczywistym.
   a) (4 pkt) Dla $a = 2$ wskaż trójkę (x,y,z), taką że $Q(x,y,z) < 0$.
   b) (16 pkt) Dla jakich wartości parametru a forma Q jest dodatnio określona?

4. Przekształcenie liniowe $F : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ (gdzie $M_{2\times 2}$ to przestrzeń macierzy rozmiaru 2×2) zadane jest wzorem $F(A) = 2A + A^\top$.
   a) (8 pkt) Uzasadnij, że podprzestrzeń macierzy symetrycznych jest przestrzenią własną dla pewnej (jakiej?) wartości własnej przekształcenia F.
   b) (6 pkt) Uzasadnij, że 1 jest wartością własną przekształcenia F i znajdź przestrzeń własną dla tej wartości własnej.
   c) (6 pkt) Czy F ma jeszcze jakieś inne wartości własne? Czy F jest diagonalizowalne? (Uzasadnij swoje odpowiedzi.)

5. Niech V będzie przestrzenią euklidesową skończonego wymiaru, W jej podprzestrzenią.
   a) (12 pkt) Uzasadnij, że dla dowolnego $v \in V$ zachodzi nierówność

$$\|P_W(v)\| \leq \|v\|$$

   b) (8 pkt) Uzasadnij, że dla dowolnych $x, y \in V$ zachodzi nierówność

$$\|P_W(x) - P_W(y)\| \leq \|x - y\|$$

6. (20 pkt) Niech $F : U \to V$ bedzie różnowartościowym przekształceniem liniowym, zaś $G : V \to W$ niech będzie epimorfizmem. Załóżmy ponadto, że $\mathrm{Im}(F) = \mathrm{Ker}(G)$. Uzasadnij, że $\dim U - \dim V + \dim W = 0$.

7. (20 pkt) Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś $J : V \to V$ izometrią liniową. Ponadto wiadomo, że J jest przekształceniem symetrycznym. Uzasadnij, że J jest symetrią (odbiciem) względem pewnej podprzestrzeni U przestrzeni V: $J = S_U$.

8. (20 pkt) Podaj przykład funkcjonału liniowego na $\mathbf{R}^3$ przyjmującego dodatnie wartości we wszystkich punktach płaszczyzny opisanej parametrycznie wyrażeniem $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$. (Uzasadnij, że Twój przykład naprawdę ma żądaną własność.)