Lista zadań na konwersatorium z algebry liniowej B2 i równań różniczkowych B2

1. Niech k, n będą dodatnimi liczbami całowitymi, $U_{kn} = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 \mid 0 < x < k, 0 < y < n\}$. Niech dane będzie $2(n-1) + 2(k-1)$ liczb rzeczywistych $f(0,t), f(k,t), f(s,0), f(s,n)$ (gdzie $t = 1, \ldots, k-1$, $s = 1, \ldots, n-1$).

Udowodnij, że istnieje co najwyżej jedna funkcja $f : U_{kn} \to \mathbf{R}$, taka że

$$(*) \qquad f(a,b) = \frac{1}{4}(f(a+1,b) + f(a-1,b) + f(a,b+1) + f(a,b-1))$$

dla każdego $(a,b) \in U_{kn}$. Wywnioskuj stąd (używając twierdzenia o indeksie), że taka funkcja istnieje.

2. Założenia jak w 1. Rozpatrzmy spacer losowy startujący w punkcie $(a_0, b_0) \in U_{kn}$. W $(m+1)$-szym kroku przemieszczamy się z punktu (a_m, b_m) w którym akurat jesteśmy do jednego z punktów $(a_m + 1, b_m)$, $(a_m - 1, b_m)$, $(a_m, b_m + 1)$, $(a_m, b_m - 1)$ (do każdego z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$).

Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 wyjdziemy poza zbiór U_{kn}.

Niech (a_s, b_s) będzie pierwszym punktem poza U_{kn} do którego dochodzimy. Wtedy $f(a_s, b_s)$ jest zmienną losową; oznaczmy przez $f(a_0, b_0)$ jej wartość oczekiwaną. Wykaż, że tak określona funkcja $f : U_{kn} \to \mathbf{R}$ spełnia warunek $(*)$.

3. Niech $Q = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbf{R}^2$, $\partial Q = ([0,1] \times \{0,1\}) \cup (\{0,1\} \times [0,1])$. Niech $f : \partial Q \to \mathbf{R}$ będzie funkcją ciągłą, zaś $U_N = \{(\frac{a}{N}, \frac{b}{N}) \mid a, b \in \{1, \ldots, N-1\}\}$. Z zadania 1 wynika, że istnieje jedyna funkcja $f_N : U_N \to \mathbf{R}$ spełniająca odpowiednik warunku $(*)$.

Udowodnij, że w pewnym (jakim?) sensie funkcje f_N zbiegają do funkcji ciągłej $F : Q \to \mathbf{R}$. Uzasadnij, że F spełnia warunek

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

(w $Q \backslash \partial Q$), oraz że $F|_{\partial Q} = f$.