Algebra liniowa A2. Lista1

Ćwiczenia (kartkówka 24.II)

1. Udowodnij następujące uwagi ze skryptu: 1.4$\Leftarrow$(b); 1.7; 1.14.
2. W poniższym rachunku każda z równości jest efektem dzialania na liczbach bądź wynika bezpośrednio z pewnego aksjomatu przestrzeni liniowej. Dla każdej równości określ, który aksjomat został użyty, i dla jakich wektorów i skalarów.

$$\begin{aligned} u+(3v+u) &= u+(u+3v) = (u+u)+3v = (1u+1u)+3v = (1+1)u+3v \\ &= 2u+3v = 2u+(2+1)v = 2u+(2v+v) = (2u+2v)+v = 2(u+v)+v \end{aligned}.$$

3. Wzorując się na rachunku z ćwiczenia 2 (tj. używając jedynie aksjomatów przestrzeni liniowej i arytmetyki liczb) uzasadnij precyzyjnie następujące równości (dla dowolnych wektorów x, u, v, w i skalarów r, t, s).
   (a) $(w+(u+v))+x = ((x+u)+w)+v$;
   (b) $tu+s(u+v) = (t+s)u+sv$;
   (c) $w+(2(u+v)+w) = (2u+2v)+w$;
   (d) $(ru+v)+w = (rs)u+(w+sv)$;
4. Niech C oznacza przestrzeń liniową wszystkich ciągów liczb rzeczywistych (patrz zadanie 4.d). Sprawdź czy jest podprzestrzenią liniową C zbiór wszystkich ciągów (a_n) takich że
   a) $\lim a_n = 0$?
   b) $\lim a_n = 1$?
   c) (a_n) jest niemalejący?
   d) $2a_7 + \lim a_n = 0$?
   e) $a_0 + \lim a_n + 1 = 0$?
   f) (a_n) jest zbieżny?
   g) (a_n) jest ograniczony?
   h) $a_1 + a_{100} = 0$?
   i) $a_{100} + 2 = 0$?
   j) $a_{100}^2 + a_0 = 0$?
   k) $a_{100}^2 = 0$?
   l) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$?
   (lim oznacza granicę przy $n \to +\infty$)
5. Sprawdź z definicji, że prosta $x+2y=0$ jest podprzestrzenią liniową $\mathbf{R}^2$. Narysuj ją, oraz 10 jej warstw.

Zadania (kartkówka 3.III)

0. Niech x, y będą wektorami w pewnej przestrzeni liniowej, zaś $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Wykaż, że $\alpha x + \beta y = \beta x + \alpha y \Leftrightarrow ((\alpha = \beta) \vee (x = y))$.
1. Wypisz wszystkie możliwe determinujące kolejność działań ustawienia nawiasów w wyrażeniu $x+u+v+w$. Pokaż, że jeśli x, u, v, w są wektorami w pewnej przestrzeni liniowej V, to każde z tych ustawień prowadzi do tego samego wektora przestrzeni V.
2. Ułóż tożsamość podobną do tych z ćwiczenia 3, której sprawdzenie wymaga użucia jak największej liczby aksjomatów.
3. Uzasadnij, że jeśli podprzestrzeń V przestrzeni liniowej $\mathbf{R}^2$ zawiera niezerowy wektor v, to albo jest ona prostą $X = tv$, albo jest całym $\mathbf{R}^2$. A jak wyglądają liniowe podprzestrzenie $\mathbf{R}^3$?
4. Sprawdź, że następujące zbiory z działaniami są przestrzeniami liniowymi:
   a) $\mathbf{R}^n$, z działaniami zdefiniowanymi na wykładzie (w szczególności $\mathbf{R}^2$ i $\mathbf{R}^3$, omawiane w poprzednim semestrze);
   b) Zbiór F wszystkich funkcji z $\mathbf{R}$ w $\mathbf{R}$, z działaniami $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(tf)(x) = t(f(x))$;
   c) Zbiór wielomianów o współczynnikach rzeczywistych (patrz przykład 2 w skrypcie);
   d) Zbiór wszyskich ciągów liczb rzeczywistych $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, z dodawaniem $(a_n)+(b_n) = (a_n+b_n)$ i mnożeniem przez skalary $t(a_n) = (ta_n)$.
   e) Zbiór szeregów formalnych, tzn. wyrażeń postaci $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$, gdzie $a_0, a_1, \ldots \in \mathbf{R}$ (w skrócie: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$), z działaniami określonymi jak dla wielomianów. Czy widzisz jakąś różnicę między tym a poprzednim przykładem?
   f) $\mathbf{C}^2 = \{(z,w) : z, w \in \mathbf{C}\}$, z działaniami $(z,w)+(z',w') = (z+z', w+w')$, $t(z,w) = (tz, tw)$.
5. Sprawdź, że poniższe zbiory z działaniami zdefiniowanymi tak samo jak w odpowiednich punktach poprzedniego zadania, są przestrzeniami liniowymi.

a) Zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ które są różniczkowalne w każdym punkcie;
b) Zbiór wszystkich ograniczonych funkcji $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$;
c) Zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ które są różniczkowalne w każdym punkcie i ponadto spełniają warunek: $\forall x \in \mathbf{R}, 2f'(x) + f(x) = 0$;
d) Zbiór wszystkich ciągów liczb rzeczywistych (a_n) takich że $\lim_{n\to\infty} a_n = 2a_0$;
e) Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnia ≤ 7;
f) $\{(z, w) \in \mathbf{C}^2 : z + 7w = 0\}$.

6. Niech F oznacza przestrzeń liniową wszystkich funkcji $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ z działaniami jak w zadaniu 4.b). Sprawdź, czy jest podprzestrzenią liniową F zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ które
   a) są ciągłe i spełniają warunek $f(0) + 2f(7) = 0$?
   b) spełniają $f(0) = 1$?
   c) spełniają $f(0) = f(1) = f(\sqrt{2}) = 0$?
   d) są różniczkowalne w 0 i spełniają $f'(0) = 0$?
   e) są różniczkowalne w 0 i spełniają $f'(0) = 7$?
   f) są różniczkowalne w 0 i spełniają $f'(0) + 3f(1) = 0$?
   g) spełniają warunek: $\exists M > 0\ \forall x \in \mathbf{R}, |x| > M \Rightarrow f(x) = 0$?
   h) spełniają warunek: $\exists M > 0\ \forall x \in \mathbf{R}, |x| > M \Rightarrow f(x) = 1$?

7. Stwierdź, czy podzbiory $\mathbf{R}^3$ zadane poniższymi równaniami są podprzestrzeniami liniowymi. Jeśli nie, wskaż parę wektorów lub wektor i skalar przeczące definicji podprzestrzeni liniowej.
   a) $x + 2y + z = 0$
   b) $x + 2y + z = 1$
   c) $\begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$
   d) $x^2 = 0$
   e) $\begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$
   f) $x^2 + z^2 = 0$
   g) $x^2 - y^2 = 0$
   h) $x^3 - y^3 = 0$

8. Dla $k \in \mathbf{N}$ niech δ^k będzie ciągiem zadanym przez $\delta^k_n = \begin{cases} 0 \text{ jeśli } n \neq k \\ 1 \text{ jeśli } n = k \end{cases}$. Opisz $Lin(\{\delta^k : k \in \mathbf{N}\})$ w przestrzeni liniowej C wszystkich ciągów liczb rzeczywistych.

9. Nie odwołując się do intuicji geometrycznych uzasadnij, że $Lin(\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\}) = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : 2x - 2y - z = 0\}$.

10. Niech W będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej V. Określmy relację $\sim$ na V warunkiem: $v \sim v' \Leftrightarrow v - v' \in W$. Udowodnij, że jest to relacja równoważności. Czym są jej klasy abstrakcji?

11. Rozpatrz ponownie przykłady z ćwiczenia 4 i zadania 7. Dla każdego z nich stwierdź, czy jest on warstwą pewnej podprzestrzeni liniowej. Jeśli tak, przedstaw go w postaci $v + W$.

12. Narysuj sumy kompleksowe podzbiorów $\mathbf{R}^2$. Posiłkuj się raczej intuicją geometryczną niż formalnymi rachunkami.
    a) $\{\binom{x}{y} : x^2 + y^2 \leq 1\} + \{\binom{x}{y} : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
    b) $\{\binom{x}{y} : x^2 + y^2 = 3\} + \{\binom{x}{y} : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
    c) $\{\binom{x}{y} : |x| \leq 1, |y| \leq 1\} + \{\binom{x}{y} : x^2 + y^2 < 1\}$;
    c) $\{\binom{x}{y} : |x| + |y| \leq 1\} + \{\binom{x}{y} : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.