Algebra liniowa A2. Lista 12

Na tej liście $V$ jest zawsze skończenie wymiarową przestrzenią euklidesową z iloczynem skalarnym $\langle\,,\rangle$.

**Ćwiczenia** (kolokwium 19.V)

1. Podaj przykład przestrzeni euklidesowej $V$, przekształcenia liniowego $F : V \to V$, podprzestrzeni $F$-niezmienniczej $W$ i wektora $w \in W$, takich że istnieje $v \in V \setminus W$ spełniające $F(v) = w$. Czy nie kłóci się to z definicją podprzestrzeni $F$-niezmienniczej?
2. Uzasadnij, że wartościami własnymi izometrii liniowych mogą być jedynie liczby $\pm 1$. [Pytanie dla odważnych: co gdy dopuścić zespolone wartości własne?]
3. Niech $\phi : V \to W$ będzie izomorfizmem, $\mathcal{B}$ – bazą $V$, $F : W \to W$ – przekształceniem liniowym. Uzasadnij, że $m_{\mathcal{B}}(\phi^{-1} \circ F \circ \phi) = m_{\phi(\mathcal{B})}(F)$.
4. Niech $\mathcal{B} = \{u, v\}$ będzie bazą $V$, $F : V \to V$ przekształceniem liniowym. Załóżmy, że $\det m_{\mathcal{B}}(F) > 0$. Czy wtedy $\det m_{\{u,-v\}}(F) < 0$?
5. Uzasadnij, że jeśli $\dim V = 2$ oraz $F : V \to V$ jest izometrią liniową o dodatnim wyznaczniku, to istnieją: baza ortonormalna $\mathcal{B}$ przestrzeni $V$ i liczba $a \in [0, \pi]$, takie że $m_{\mathcal{B}}(F) = \left(\begin{smallmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{smallmatrix}\right)$.
6. Znajdź macierze odbić względem hiperpłaszczyzn: $\{(1,0,-2,2)^\top\}^\perp$, $\{(1,1,-1,-1)^\top\}^\perp$. Uzasadnij, że złożenie tych odbić jest obrotem w pewnej płaszczyźnie. Znajdź tę płaszczyznę.
7. Czy złożenie dwóch różnych odbić w hiperpłaszczyznach zawsze jest obrotem w pewnej płaszczyźnie?
8. Załóżmy, że $A \in M_n(\mathbf{R})$ i $A^{1000000} = 0$. Udowodnij, że istnieje $X \in \mathbf{R}^n$, taki że $AX = O$.
9. Znajdź bazy ortonormalne w których poniższe macierze ortogonalne mają postać kanoniczną (i napisz te postacie kanoniczne):

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Niech $v, w \in V$ spełniają $\|v\| = \|w\|$. Uzasadnij, że istnieje izometria liniowa $F : V \to V$ taka że $F(v) = w$.
11. Na wykładzie było pokazane (?), że każda izometria liniowa przestrzeni $n$-wymiarowej jest złożeniem co najwyżej $n$ odbić w hiperpłaszczyznach. Wywnioskuj stąd, że każda zachowująca orientację izometria liniowa przestrzeni $\mathbf{R}^3$ jest obrotem w pewnej płaszczyźnie.

**Zadania** (egzamin 11.VI)

1. Niech $F : V \to V$ będzie izometrią liniową, $v \in V$ – dowolnym wektorem. Uzasadnij, że istnieją dwie różne dodatnie liczby całkowite $k, m$ takie że $\|F^k(v) - F^m(v)\| < 0{,}000001$. Wywnioskuj stąd, że istnieje dodatnia liczba całkowita $n$ taka że $\|F^n(v) - v\| < 0{,}000001$. [Wsk. Rozwiąż najpierw dla dwuwymiarowego $V$, a potem skorzystaj z postaci kanonicznej. Można też inaczej.]
2. Niech $F : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym, zaś $v \in V$ – dowolnym wektorem. Załóżmy, że $\dim V = 10$. Uzasadnij, że $Lin(\{v, F(v), F^2(v), \ldots, F^{20}(v)\}) = Lin(\{v, F(v), F^2(v), \ldots, F^{21}(v)\})$.