Algebra liniowa A2. Lista 13

Na tej liście V jest zawsze skończenie wymiarową przestrzenią liniową, zaś Φ funkcjonałem dwuliniowym na niej. Pisząc macierze funkcjonałów liniowych zawsze używamy standardowej bazy $\{1\}$ przeciwdziedziny $\mathbf{R}$, i dla krótkości piszemy wtedy $m_{\mathcal{B}}$ zamiast $m_{\mathcal{B},\{1\}}$.

Ćwiczenia (kartkówka 26.V)

1. Niech $\mathcal{B}$ oraz $\mathcal{B}'$ będą bazami V, zaś $\phi \in V^*$. Wyraź $m_{\mathcal{B}'}(\phi)$ przez $m_{\mathcal{B}}(\phi)$ i $m_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(id)$.
2. Uzasadnij, że jeśli $\phi \in V^*$, to $\ker\phi$ jest hiperpłaszczyzną (jeśli $\phi \neq 0$), lub $\ker\phi = V$ (jeśli $\phi = 0$).
3. Załóżmy, że V jest przestrzenią euklidesową, $w \in V$. Uzasadnij, że $v \mapsto \langle v, w\rangle$ jest funkcjonałem liniowym na V.
4. Niech $\phi \in V^*$. Uzasadnij, że $\phi \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{rząd}(\phi) \neq 0$.
5. Uzasadnij, że znak liczby $\det m_{\mathcal{B}}(\Phi)$ nie zależy od wyboru $\mathcal{B}$.
6. Udowodnij, że jeśli $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ są macierzami symetrycznymi, takimi że $\det(A)\cdot\det(B) < 0$, to nie istnieje macierz $C \in M_n(\mathbf{R})$ taka że $C^*AC = B$.
7. Uzasadnij, że jeśli macierz A jest symetryczna, to dla każdego C macierz C^*AC też jest symetryczna.
8. Sprawdź że kryterium Sylvestera jest prawdziwe dla macierzy diagonalnych.
9. Sprawdź, że wzór $\Phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)xdx$ zadaje dwuliniowy symetryczny funkcjonał na przestrzeni $\mathbf{R}_2[X]$. Znajdź macierz tego funkcjonału w bazie $\{1, X, X^2\}$. Zbadaj, czy jest on dodatnio określony.
10. Które z poniższych macierzy są dodatnio określone?
    (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 16 \\ 0 & 2 & 1 \\ 16 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. (d) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbf{R}$.
11. Imitując proces Grama–Schmidta, znajdź macierz C taką że C^*AC jest diagonalna
    (a) $\begin{pmatrix} -5 & -1 & -6 \\ -1 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & -3 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
12. Wyznacz macierz Φ w bazie $\{b_1', b_2', b_3'\}$, jeśli $b_1' = b_1 + 2b_2 - b_3$, $b_2' = b_2 - b_3$, $b_3' = -b_1 + b_2 - 3b_3$, zaś
$$m_{\{b_1,b_2,b_3\}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Zadania (egzamin 11.VI)

1. Uzasadnij, że jeśli $\phi \in V^*$, to istnieje baza $\mathcal{B}$ przestrzeni V, taka że albo $m_{\mathcal{B}}(\phi) = (1, 0, \ldots, 0)$, albo też $m_{\mathcal{B}}(\phi) = (0, 0, \ldots, 0)$. (Wsk. wybierz najpierw bazę jądra ϕ.)
2. Niech $\phi, \psi \in V^*$, przy czym $\phi \neq 0$. Uzasadnij, że istnieje przekształcenie liniowe $F : V \to V$, takie że $\psi = \phi \circ F$. (Wsk. do ϕ i ψ dobierz bazy jak w poprzednim zadaniu. Rozpatrz przekształcenie przeprowadzające jedną bazę na drugą.)
3. Załóżmy, że V jest przestrzenią euklidesową. Pokaż, że: $\forall \phi \in V^*, \exists w \in V, \forall v \in V, \phi(v) = \langle v, w\rangle$. Czy takie w jest jedyne? (Wsk. rozważ macierz ϕ w bazie ortonormalnej.)
4. Uzasadnij, że suma kwadratów wszystkich wyrazów macierzy funkcjonału liniowego w bazie ortonormalnej nie zależy od wyboru takiej bazy, a jedynie od funkcjonału liniowego. (Wsk. użyj ćw. 1.)
5. Udowodnij, że jeśli H jest hiperpłaszczyzną w V, to istnieje $\phi \in V^*$, takie że $H = \ker\phi$.
6. Udowodnij, że jeśli $\phi, \psi \in V^*$ oraz $\ker\phi = \ker\psi$, to istnieje $\alpha \in \mathbf{R}$, taka że $\psi = \alpha\phi$.
7. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą V, $v \in V$ – niezerowym wektorem takim że $\forall u \in V, \Phi(u, v) = 0$. Uzasadnij, że $\det m_{\mathcal{B}}(\Phi) = 0$.
8. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą V, $F : V \to V$ przekształceniem liniowym. Jak zapisać warunek: $(\forall u, v \in V), \Phi(F(u), v) = -\Phi(u, F(v))$; w terminach macierzy $m_{\mathcal{B}}(F), m_{\mathcal{B}}(\Phi)$?
9. Mówimy, że macierz kwadratowa A jest ujemnie określona, jeżeli dla wszelkich niezerowych x zachodzi $x^*Ax < 0$.
   a) Uzasadnij, że A jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy gdy $-A$ jest dodatnio określona.
   b) Jak należy sformułować kryterium Sylvestera dla macierzy ujemnie określonych?