Algebra liniowa A2. Lista 2

Ćwiczenia (kartkówka 3.III)

1. Dokończ dowód uwagi 2.1 ze skryptu.
2. Udowodnij lub obal tożsamości: $Lin(A) + Lin(B) = Lin(A \cup B)$, $Lin(A \cap B) = Lin(A) \cap Lin(B)$.
3. Niech A będzie podzbiorem pewnej przestrzeni liniowej. Udowodnij, że A jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy skończony podzbiór zbioru A jest liniowo niezależny.
4. Wyznacz (pewną) bazę i wymiar następujących podprzestrzeni $\mathbf{R}^3$:

a) $Lin(\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\})$

b) $Lin(\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}\})$

c) $Lin(\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\})$

d) $Lin(\{\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\})$

e) $Lin(\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6\\0\\3\end{pmatrix}\})$

f) $Lin(\{\begin{pmatrix}1\\n\\0\end{pmatrix} : n \in \mathbf{N}\})$

g) $Lin(\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\}) \cap Lin(\{\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\})$

h) $Lin(\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\}) + Lin(\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\})$

i) $Lin(\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\}) + Lin(\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\}) + Lin(\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\})$

j) $Lin(\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\}) \cap Lin(\{\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\})$

5. Używając warunku $(*)$ z faktu 2.3 uzasadnij liniową niezależność następujących zbiorów wektorów:

a)$\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}\}$; b)$\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\}$.

6. Podaj przykład przestrzeni liniowej V i czterech różnych jej podprzestrzeni V_1, V_2, V_3, V_4, takich że $\{O\} \neq V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset V_4 \neq V$.

Zadania (kartkówka 10.III)

1. Udowodnij uwagę 2.9.3) ze skryptu.
2. Sprawdź, czy są liniowo niezależne następujące podzbiory przestrzeni funkcji z $\mathbf{R}$ w $\mathbf{R}$:
   a) $\{\sin x, \cos x\}$;
   b) $\{1, x, x^2, x^3\}$;
   c) $\{1, \cos(2x), \cos^2 x\}$;
   d) $\{1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x)\}$.
3. Wykaż, że następujący podzbiór $\mathbf{R}^5$: $\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\}$ jest bazą przestrzeni $\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 :$ $2x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 = 0,$ $x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$.
4. Wyznacz bazę i wymiar $Lin(A)$, gdzie

a) $A = \{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}\}$ b) $A = \{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\5\\5\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\}$.

5. Znajdź bazę podprzestrzeni $\mathbf{R}^5$ zadanej układem równań: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$. (Uzasadnij, że jest to naprawdę baza.)

6. Uzupełnij zbiór wektorów z ćwiczenia 5.b) do bazy $\mathbf{R}^5$. Czy potrafisz opisać podprzestrzeń $\mathbf{R}^5$ generowaną przez zbiór wektorów z ćwiczenia 5.b) jako zbiór wszystkich rozwiązań pewnego układu równań liniowych?
7. Uzasadnij, że przestrzeń V której przykładu żąda ćwiczenie 6 musi mieć wymiar ≥ 5.
8. Załóżmy, że A jest bazą przestrzeni liniowej V, zaś B jest bazą przestrzeni liniowej W. Czy zbiór $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ jest bazą $V \times W$? Jak wymiar $V \times W$ wyraża się przez $\dim V$ i $\dim W$?
9. Czy jest prawdą, że w dowolnej przestrzeni liniowej, dla dowolnych jej podprzestrzeni liniowych U, V, W zachodzi $U \cap (V + W) = U \cap V + U \cap W$?
10. Niech W będzie podprzestrzenią liniową V, zaś $\{v_1, \ldots, v_k\}$ – bazą V taką że $\{v_1, \ldots, v_n\}$ jest dla pewnego $n \leq k$ bazą W (uzasadnij, że taka baza V zawsze istnieje). Udowodnij, że $\{v_{n+1} + W, \ldots, v_k + W\}$ jest bazą V/W. Wywnioskuj, że $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$.
11. W przestrzeni C ciągów liczb rzeczywistych podaj przykład (a) nieskończonej rodziny podprzestrzeni spełniającej $V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \ldots$; (b) rodziny podprzestrzeni $\{V_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$ takiej że dla każdego $i \in \mathbf{Z}$ zachodzi $V_i \neq V_{i+1}$, $V_i \subset V_{i+1}$, a ponadto $\bigcap_{i \in \mathbf{Z}} V_i \neq \{O\}$, $\bigcup_{i \in \mathbf{Z}} V_i \neq C$.
12. Uzasadnij, że zbiór $V = \{(a_n) : \forall n \geq 0, a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n\}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni ciągów liczb rzeczywistych. Znajdź wymiar V. (Wsk. Uzasadnij, że istnieje jedyny ciąg $(b_n) \in V$ taki że $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, oraz jedyny ciąg $(c_n) \in V$ taki że $c_0 = 0$, $c_1 = 1$; wykaż, że $\{(b_n), (c_n)\}$ jest bazą V.)