Algebra liniowa A2. Lista 3

Na tej liście V, U, W zawsze oznaczają wymiarowe przestrzenie liniowe. Można zakładać, że są one skończenie wymiarowe.

Ćwiczenia (kartkówka 10.III)

1. Dokończ dowód uwagi 3.9.2 ze skryptu.
2. Precyzyjnie sformułuj a następnie udowodnij łączność mnożenia macierzy.
3. a) Uzasadnij, że $Id : V \to V$ jest izomorfizmem liniowym.
   b) Uzasadnij, że jeśli F jest izomorfizmem liniowym, to również F^{-1} jest izomorfizmem liniowym.
   c) Uzasadnij, że jeśli $F : V \to W$ oraz $G : W \to U$ są izomorfizmami liniowymi, to także $G \circ F : V \to U$ jest izomorfizmem liniowym.
4. Uzasadnij, że jeśli $\{b_1, \ldots, b_n\}$ jest bazą V, zaś $F : V \to W$ jest izomorfizmem liniowym, to $\{F(b_1), \ldots, F(b_n)\}$ jest bazą W.
5. Podaj przykłady wskazujące że jeśli $\{b_1, \ldots, b_n\}$ jest bazą V, zaś $F : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, to $\{F(b_1), \ldots, F(b_n)\}$ nie musi być bazą W.
6. Niech $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ będzie dane wzorem $F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y+z \\ z-x \end{pmatrix}$. Znajdź $m_{\mathcal{BB}}(F)$ (oznaczane też krócej $m_{\mathcal{B}}(F)$), gdy $\mathcal{B}$ jest bazą
   a) $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, *b)* $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, *c)* $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$. Oblicz wyznaczniki otrzymanych macierzy.
7. Niech $F : \mathbf{R}_5[X] \to R$ będzie dane przez $F(P) = \int_0^1 P(X)dX$. Znajdź macierz F, przyjmując $\{1, X, X^2, X^3, X^4, X^5\}$ za bazę V, zaś $\{2\}$ za bazę $\mathbf{R}$.

Zadania (kartkówka 17.III)

1.
2. Niech $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ będzie dane wzorem $F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ x-y+z \end{pmatrix}$.
   a) Przyjmując za bazę $\mathbf{R}^3$ bazę z ćwiczenia 6.c), zaś za bazę $\mathbf{R}^2$ zbiór $\{\binom{1}{2}, \binom{3}{4}\}$, znajdź macierz F.
   b) Znajdź bazy $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbf{R}^3$ oraz $\mathcal{C}$ przestrzeni $\mathbf{R}^2$, takie że $m_{\mathcal{BC}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Niech $V = U \oplus W$. Uzasadnij, że V i $U \times W$ są izomorficzne.
4. Pokaż, że $V = U \oplus W$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki:
   a) $V = U + W$;
   b) $\forall u \in U, \forall w \in W, (u + w = O \Rightarrow u = w = O)$.
5. Pokaż, że $V = U \oplus W$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki:
   a) $V = U + W$;
   b) $U \cap W = \{O\}$.
6. Podaj przykład trzech podprzestrzeni U, V, W w $\mathbf{R}^3$, takich że $U \cap V = V \cap W = W \cap U = \{O\}$, ale $\mathbf{R}^3 \neq U \oplus V \oplus W$.
7. Udowodnij, stosując indukcję względem n, że jeśli $F : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, to dla dowolnych $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{R}$ oraz dowolnych $v_1 \ldots, v_n \in V$ zachodzi wzór $F(\sum_{i=1}^n t_i v_i) = \sum_{i=1}^n t_i F(v_i)$.
8. Sprawdź, że podane w skrypcie przykłady przekształceń liniowych naprawdę są przekształceniami liniowymi.

9. Czy istnieje przekształcenie liniowe $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, takie że

$$F\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 2, \quad F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 3, \quad F\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 1, \quad F\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = 1?$$

Czy odpowiedź zmieni się jeśli zastąpimy ostatni warunek przez $F\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = -2$?

10. Niech $V = \{P \in \mathbf{R}_3[X] : P(1) = 0\}$, zaś $F : V \to \mathbf{R}_2[X]$ będzie zadane wzorem $F(P) = P'$.
    a) Uzasadnij, że V jest podprzestrzenią $\mathbf{R}_3[X]$.
    b) Uzasadnij, że F jest przekształceniem liniowym.
    c) Wybierz bazy: $\mathcal{B}$ przestrzeni V oraz $\mathcal{C}$ przestrzeni $\mathbf{R}_2[X]$.
    c) Znajdź $m_{\mathcal{BC}}(F)$.
11. Dla przestrzeni V z poprzedniego zadania znajdź izomorfizm liniowy $F : V \to \mathbf{R}^3$.
12. Uzasadnij, że jeśli $F : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, ale nie jest izomorfizmem liniowym, to
    a) istnieje baza $\{b_1, \ldots, b_n\}$ przestrzeni V, taka że $\{F(b_1), \ldots, F(b_n)\}$ nie jest bazą W;
    b) jeśli $\{b_1, \ldots, b_n\}$ jest bazą przestrzeni V, to $\{F(b_1), \ldots, F(b_n)\}$ nie jest bazą W.