Algebra liniowa A2. Lista 4

Na tej liście V, U, W zawsze oznaczają przestrzenie liniowe. Można (a czasem trzeba) zakładać, że są one skończenie wymiarowe.

Ćwiczenia (kartkówka 17.III)

1. Uzadadnij, że $\{A \in M_{2\times 3} : A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = O\}$ jest podprzestrzenią $M_{2\times 3}$.
2. Uzasadnij, że każda podprzestrzeń W przestrzeni V jest obrazem pewnego przekształcenia liniowego.
3. Znajdź obrazy i jądra przekształceń $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ zadanych w bazach standardowych macierzami: (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$.
4. Niech $F : V \to W$ oraz $G : W \to U$ będą przekształceniami liniowymi. Uzasadnij, że $\mathrm{Ker}(G \circ F) \supseteq \mathrm{Ker}(F)$, oraz że $\mathrm{Im}(G \circ F) \subseteq \mathrm{Im}(G)$. Podaj przykłady pokazujące, że zawierania mogą być istotne.
5. Uzasadnij, że jeśli $\dim V < \dim W$, to
   a) nie istnieje epimorfizm (tj. przekształcenie liniowe które jest na) $F : V \to W$;
   b) nie istnieje monomorfizm (tj. przekształcenie liniowe które jest różnowartościowe) $F : W \to V$.
6. Oblicz wymiar jądra przekształcenia o macierzy (a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & -6 & 12 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$, gdzie $*$ to nieznane liczby.
7. Znajdź macierz różniczkowania w bazie $\{1, X, \ldots, X^n\}$ przestrzeni $\mathbf{R}_n[X]$.

Zadania (kartkówka 24.III)

1. Niech A będzie macierzą $m \times n$ o wyrazach $a_{ij} = j - i$, zaś B – macierzą $k \times m$ o wyrazach $b_{ij} = j + i$. Znajdź macierz AB.
2. Dla każdej z następujących podprzestrzeni $\mathbf{R}^3$ wskaż przestrzeń liniową V i surjektywne przekształcenie liniowe $F : \mathbf{R}^3 \to V$, takie że dana podprzestrzeń jest jądrem F.
   a) $Lin(\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\})$; b) $Lin(\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\})$; c) $Lin(\{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\})$; d) $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : 2x + y - 3z = 0\}$.
3. Niech $F : \mathbf{R}^{150} \to \mathbf{R}$ będzie zadane wzorem $F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{150} \end{pmatrix} = x_1 + 2x_2 + \ldots + 150x_{150}$. Oblicz $\dim \mathrm{Ker}(F)$.
4. Wykaż, że następujący podzbiór $\mathbf{R}^5$: $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ generuje przestrzeń $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 :$ $2x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 = 0,$ $x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$,
   a) stwierdzając, że jest on liniowo niezależny, a następnie
   b) interpretując przestrzeń jako jądro pewnego przekształcenia liniowego $\mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^2$ i licząc wymiar obrazu tego przekształcenia.
5. Niech $F : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ dane będzie wzorem $F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_4 \\ 2x_2 - x_3 \\ x_3 + 2x_4 \\ 2x_4 \end{pmatrix}$.
   a) Wylicz $\mathrm{Ker}(F)$.
   b) Napisz macierz F w bazie standardowej i sprawdź czy F jest odwracalne badając liniową niezależność kolumn tej macierzy.
   c) Znajdź wzór na F^{-1}, oraz macierz F^{-1} w bazie standardowej.

d) Znajdź $\mathrm{Im}(F)$.

6. Niech $\Phi : \mathbf{R}^3 \to (\mathbf{R}^3)^*$ będzie zadane przez $\Phi(X) : Y \to \langle Y, X\rangle$ (X, Y to wektory z $\mathbf{R}^3$).
   a) Uzasadnij, że Φ jest przekształceniem liniowym.
   b) Uzasadnij, że $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{O\}$.
   c) Uzasadnij, że Φ jest izomorfizmem.
7. Niech F będzie pewnym ustalonym endomorfizmem V. Pokaż, że $\{G \in \mathrm{Hom}(V, W) : G \circ F = 0\}$ jest podprzestrzenią liniową $\mathrm{Hom}(V, W)$.
8. Znajdź $\dim\{P \in \mathbf{R}_{15}[X] : P(2) + P''(4) = 0\}$ (Wsk. Zinterpretuj tą podprzestrzeń jako jądro pewnego przekształcenia liniowego; zajmij się obrazem tego przekształcenia.)
9. (Dla tych, co umieją całkować) Znajdź $\dim\{P \in \mathbf{R}_{15}[X] : \int_0^1 P(X)dX = 0\}$.
10. Niech $F, G : V \to V$ będą przekształceniami liniowymi, takimi że $F \circ G = 0$. Uzasadnij, że $\dim \mathrm{Ker}(G) + \dim \mathrm{Ker}(F) \geq \dim V$. (Wsk. Uzasadnij, że $\mathrm{Im}(G) \subseteq \mathrm{Ker}(F)$.)
11. Uzasadnij, że każda podprzestrzeń liniowa przestrzeni V jest jądrem pewnego przekształcenia liniowego o dziedzinie V.
12. Niech $V = U \oplus W$, niech $\{a_1, \ldots, a_k\}$ będzie bazą U, zaś $\{a_{k+1}, \ldots, a_n\}$ bazą W. Połóżmy $F(u+w) = u$, dla dowolnych $u \in U$, $w \in W$. Uzasadnij, że wzór ten poprawnie definiuje przekształcenie liniowe $F : V \to V$. Znajdź macierz tego przekształcenia względem bazy $\{a_1, \ldots, a_n\}$.
13. Oblicz wymiar $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 : \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases} \right\}$.
14. Niech $F, G : V \to V$ będą przekształceniami liniowymi. Uzasadnij, że jeśli $F \circ G = Id$, to F jest odwracalne i $F^{-1} = G$. (W I semestrze było podobne zadanie o macierzach 3×3.)