Algebra liniowa A2. Lista 7

Na tej liście V, U, W zawsze oznaczają przestrzenie liniowe. Można (a czasem trzeba) zakładać, że są one skończenie wymiarowe.

Ćwiczenia (kolokwium 7.IV)

1. Oblicz rzędy macierzy; wskaż nieznikający minor maksymalnego stopnia.
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 & 21 \end{pmatrix}$;
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 9 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Oblicz wymiary i podaj bazy następujących przestrzeni: a) $\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 : \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \}$;
b) $\{P \in \mathbf{R}_3[X] : P''(1) = P'(-1) + P(0) = 0\}$.
2. Znajdź macierz przejścia z bazy $\mathcal{B}$ do bazy $\mathcal{B}'$:
$\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$, $\mathcal{B}' = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$;
a) Oblicz $[v]_{\mathcal{B}}$, wiedząc że $[v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. b) Znajdź $m_{\mathcal{B}'}(F)$, jeśli $m_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
c) Znajdź $m_{\mathcal{B}}(F)$, jeśli $m_{\mathcal{B}'}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Niech $F : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.
   a) Uzasadnij, że jeśli dla pewnych baz: $\mathcal{B}$ przestrzeni V i $\mathcal{C}$ przestrzeni W, kolumny macierzy $m_{\mathcal{BC}}(F)$ są liniowo niezależne, to F jest monomorfizmem.
   b) Uzasadnij, że jeśli dla pewnych baz: $\mathcal{B}$ przestrzeni V i $\mathcal{C}$ przestrzeni W, wiersze macierzy $m_{\mathcal{BC}}(F)$ są liniowo niezależne, to F jest epimorfizmem.
   c) Uzasadnij, że jeśli F jest monomorfizmem to dla dowolnych baz: $\mathcal{B}$ przestrzeni V i $\mathcal{C}$ przestrzeni W, kolumny macierzy $m_{\mathcal{BC}}(F)$ są liniowo niezależne.
   d) Uzasadnij, że jeśli F jest epimorfizmem to dla dowolnych baz: $\mathcal{B}$ przestrzeni V i $\mathcal{C}$ przestrzeni W, wiersze macierzy $m_{\mathcal{BC}}(F)$ są liniowo niezależne.
4. Niech $F : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, $\mathcal{B}$ bazą przestrzeni V zaś $\mathcal{C}$ bazą przestrzeni W
   a) Uzasadnij, że jeśli wiersze $m_{\mathcal{BC}}(F)$ są liniowo niezależne, to $\dim(V) \geq \dim(W)$.
   b) Uzasadnij, że jeśli kolumny $m_{\mathcal{BC}}(F)$ są liniowo niezależne, to $\dim(V) \leq \dim(W)$.
5. Uzasadnij, że jeśli rząd(A) jest równy liczbie kolumn A, to rząd(AB) = rząd(B). Uzasadnij też, że jeśli rząd(C) jest równy liczbie wierszy C, to rząd(BC) = rząd(B).
6. Uzasadnij, że rząd$(ABC) \leq$ rząd(B). Uogólnij na iloczyny większej liczby macierzy.
7. Podaj przykład
   a) macierzy 4×11 rzędu 3 o wszystkich wyrazach niezerowych;
   b) macierzy 4×5 rzędu 2 o wszystkich wyrazach różnych.
8. Uzasadnij, że jeśli $F : V \to W$ jest odwracalnym przekształceniem liniowym, to istnieją bazy $\mathcal{B}$ przestrzeni V i $\mathcal{C}$ przestrzeni W, takie że $m_{\mathcal{BC}}(F) = I$.
9. Uzasadnij, że zbiór wszystkich wektorów własnych endomorfizmu F przestrzeni V odpowiadających ustalonej wartości własnej λ jest podprzestrzenią V.
10. Uzasadnij, że jeśli $F : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, zaś U jest podprzestrzenią V, taką że $\mathrm{Ker}(F) \cap U = \{O\}$ i $\{F(u) : u \in U\} = \mathrm{Im}(F)$, to $V = \mathrm{Ker}(F) \oplus U$.
11. Uzasadnij, że jeśli W jest podprzestrzenią V, to V jest izomorficzna z $W \times V/W$.