Algebra liniowa A2. Lista 8

**Ćwiczenia** (kartkówka 14.IV)

1. Dla przekształceń zadanych (w bazie standardowej) poniższymi macierzami znajdź wielomian charakterystyczny, wartosci własne, ich krotności, przestrzenie wektorów własnych. Stwierdź czy macierz diagonalizuje się; jeśli tak, wskaż bazę złożoną z wektorów własnych.
$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
2. Docent Karol Juzek śmie twierdzić, że wielomianem charakterystycznym macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ jest $-X^3 + 4X^2 - X - 3$. Dwoma dodawaniami obal jego tezę.
3. Niech $F, G : V \to V$ będą przekształceniami liniowymi. Uzasadnij, że jeśli $V$ jest wektorem własnym $F$, to $G(v)$ też jest wektorem własnym $F$ dla tej samej wartości własnej co $v$.
4. Stwierdź, czy macierze diagonalizują się: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
5. Podaj przykład macierzy $4 \times 4$ która diagonalizuje się, a wszystkie jej wyrazy są dodatnie.

**Zadania** (kartkówka 28.IV)

1. Uzasadnij, że wyrazem wolnym wielomianu charakterystycznego jest wyznacznik; zidentyfikuj też dwa wyrazy najwyższego stopnia.
2. Oblicz wielomian charakterystyczny macierzy $\begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Które wielomiany stopnia $n$ są wielomianami charakterystycznymi jakichś macierzy?
3. Niech $F : V \to V$ będzie liniowe. Uzasadnij, że jeśli $\dim(V^\lambda) = t$, to $(\lambda - X)^t$ jest czynnikiem wielomianu charakterystycznego $F$. (Wsk. Rozważ macierz $F$ w bazie, której pierwsze $t$ wektorów jest z $V^\lambda$.)
4. Z zadania 3 wywnioskuj nierówność $\sum_i \dim(V^{\lambda_i}) \leq \dim(V)$. (Ta nierówność była już w inny sposób udowodniona na wykładzie.)
5. Rozważmy macierze $4 \times 4$ o dwóch wartościach własnych. Jakie mogą być krotności tych wartości własnych, i jakie są wówczas dopuszczalne wymiary odpowiednich przestrzeni wektorów własnych? Opisz wszystkie możliwości; dla każdej z nich podaj przykład macierzy realizującej ją.
6. Znajdź możliwie dużo podprzestrzeni $F$-niezmienniczych dla przekształcenia $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ zadanego macierzą a) (2); b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Spróbuj sformułować jakieś ogólne hipotezy (np. ile będzie podprzestrzeni niezmienniczych, jeśli $F$ ma $n$ różnych wartości własnych?). Rozważ dodatkowe przykłady, jeśli odczuwasz taką potrzebę.
7. Podaj przykład endomorfizmu $\mathbf{R}^2$ który ma nieskończenie wiele podprzestrzeni niezmienniczych.
8. Niech $A \in M_n(\mathbf{R})$ będzie macierzą diagonalną bez wielokrotnych wartości własnych, zaś $X \in \mathbf{R}^n$ wektorem o wszystkich współrzędnych niezerowych. Uzasadnij, że wektory $X, AX, A^2X, \dots, A^{n-1}X$ są liniowo niezależne. (Wsk. użyj wyznacznika Vandermonda.)
9. Załóżmy, że $\dim V = n$, $F : V \to V$ ma $n$ różnych wartości własnych (tzw. widmo mocy $n$), zaś $\{b_1, \dots, b_n\}$ jest bazą $V$ złożoną z wektorów własnych $F$. Niech $v = \sum_{i=1}^n a_i b_i$, gdzie wszystkie liczby $a_i$ są niezerowe. Uzasadnij, że $\{v, F(v), F^2(v), \dots, F^{n-1}(v)\}$ jest bazą $V$. (Wsk. użyj wyznacznika Van der Monde'a.)
10. Używając zadania 8 wyznacz wszystkie podprzestrzenie niezmiennicze przekształcenia $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ zadanego macierzą $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Rozważ też przypadek $3 \times 3$, jeśli masz na to ochotę.
11. Uzasadnij, że jeśli $A \in M_n(\mathbf{R})$ ma $n$ różnych wartości własnych, to istnieje $\epsilon > 0$ taki że jeśli zmienić każdy wyraz $A$ o mniej niż $\epsilon$, to otrzymana macierz wciąż będzie miała $n$ różnych wartośi własnych.