Algebra liniowa A2. Lista 9

Na tej lście "układ" oznacza "układ równań liniowych". Wiele układów na tej liście pochodzi ze Zbioru zadań z algebry (pod red. Kostrykina); w zbiorze tym można ich znaleźć więcej.

Ćwiczenia (kartkówka 28.IV)

1. Dla poniższych układów równań znajdź rozwiązanie ogólne.

$$\begin{cases} 5x_1+3x_2+5x_3+12x_4=10 \\ 2x_1+2x_2+3x_3+5x_4=4 \\ x_1+7x_2+9x_3+4x_4=2 \end{cases} \quad \begin{cases} -9x_1+10x_2+3x_3+7x_4=7 \\ -4x_1+7x_2+x_3+3x_4=5 \\ 7x_1+5x_2-4x_3-6x_4=3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3-2x_4+x_5=4 \\ 6x_1+3x_2+5x_3-4x_4+3x_5=5 \\ 2x_1+x_2+7x_3-4x_4+x_5=11 \\ 4x_1+2x_2+2x_3-3x_4+3x_5=6 \end{cases}$$

2. Znajdź wszystkie wektory, które są przez przekształcenie o danej macierzy przeprowadzane na dany wektor:

(a) $\begin{pmatrix} 12 & 9 & 3 & 10 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 8 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 & -5 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

3. Wskaż bazę jądra przekształcenia ($\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$) zadanego (w bazie standardowej) macierzą:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 3 \\ 7 & 9 & 9 & 6 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Wyznacz układ fundamentalny rozwiązań układu jednorodnego:

$$\begin{cases} x_1-x_3+x_5=0 \\ x_2-x_4+x_6=0 \\ x_1-x_2+x_5-x_6=0 \\ x_2-x_3+x_6 \\ x_1-x_4+x_5=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5=0 \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5=0 \\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5=0 \\ 7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5=0 \end{cases}$$

5. Zbadaj układ i znajdź, w zależności od parametru t, jego rozwiązanie ogólne.

$$\begin{cases} -6x_1+8x_2-5x_3-x_4=9 \\ -2x_1+4x_2+7x_3+3x_4=1 \\ -3x_1+5x_2+4x_3+2x_4=3 \\ -3x_1+7x_2+17x_3+7x_4=t \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=2 \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=4 \\ 4x_1+14x_2+x_3+7x_4=4 \\ 2x_1-3x_2+3x_3+tx_4=7 \end{cases}; \quad \begin{cases} (1+t)x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+(1+t)x_2+x_3=t \\ x_1+x_2+(1+t)x_3=t^2 \end{cases}$$

6. Niech $F, G : V \to V$ będą przekształceniami liniowymi. Załóżmy, że $F \circ G = G \circ F$. Uzasadnij, że jeśli v jest wektorem własnym F, to $G(v)$ też jest wektorem własnym F dla tej samej wartości własnej co v. Podaj przykład pokazujący, że bez założenia $F \circ G = G \circ F$ teza (a) nie musi być prawdziwa; (b) może być prawdziwa.

7. Znajdź wielomian $P(X)$ o współczynnikach rzeczywistych
   a) stopnia 2, taki że $P(1)=8$, $P(-1)=2$ i $P(2)=14$;
   b) stopnia 3, taki że $P(-2)=1$, $P(-1)=3$, $P(1)=13$ i $P(2)=33$;
   c) stopnia 4, taki że $P(-3)=-77$, $P(-2)=-13$, $P(-1)=1$, $P(1)=-1$ i $P(2)=-17$.

8. Stosując wzory Cramera rozwiąż układ

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6 \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12 \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6 \end{cases}$$

9. Zbadaj niesprzeczność układu

$$\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1+x_2+x_3=4 \\ x_2+x_3+x_4=-3 \\ x_3+x_4+x_5=2 \\ x_4+x_5=-1 \end{cases}$$

Zadania (kartkówka 5.V)

1. Mietek i Gucio grają w następującą grę: pobierają od doc. Karola Juzka sprzeczny układ równań; Mietek wybiera i wskazuje palcem pewien wyraz macierzy rozszerzonej tego układu, a wtedy Gucio może dowolnie zmienić jego wartość. Jeśli układ pozostaje sprzeczny, wygrywa Mietek; w przeciwnym razie wygrywa Gucio. Podaj przykład układu, dla którego
   a) Mietek ma strategię wygrywającą;
   b) Gucio ma strategię wygrywającą.

Spróbuj podać po kilka przykładów, różnych rozmiarów i możliwie nietrywialnych. Wypróbuj skuteczność Swoich przykładów grając z kolegami.

2. Uzasadnij, że jeśli układ ma co najmniej 2 rozwiązania, to ma ich nieskończenie wiele.
3. Uzasadnij, że jeśli układ ma co najmniej 2 rozwiązania, to rząd jego macierzy głównej jest mniejszy niż jej liczba kolumn.
4. Uzasadnij, że jeśli układ sześciu równań z pięcioma niewiadomymi jest niesprzeczny, to wyznacznik macierzy rozszerzonej tego układu jest zerem. Uogólnij na układy innych rozmiarów.
5. Uzasadnij, że jeśli rząd macierzy głównej układu jest równy jej liczbie wierszy, to układ jest niesprzeczny. Podaj przykład wskazujący, że nie jest to konieczny warunek niesprzeczności.
6. Znajdź układ jednorodny złożony z (a) dwóch (b) trzech (c) czterech równań, dla którego wektory $(1,4,-2,2,-1)^\top$, $(1,13,-1,2,9)^\top$, $(2,7,-8,4,-5)^\top$ stanowią fundamentalny układ rozwiązań.
7. Dla każdego z układów z ćwiczenia 1 opisz (układem równań) zbiór prawych stron dla których układ ma rozwiązanie; opisz (układem równań) obrazy przekształceń zadanych macierzami z ćwiczenia 2; itd., itp.
8. Przestrzenie rozpinane przez poniższe układy wektorów opisz układami równań:
(a) $\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\7\\7\end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\8\\9\\-2\end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\4\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-5\\12\\11\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\6\\3\\-3\end{pmatrix}$.
9. Uzasadnij, że zbiór prawych stron dla których układ o ustalonej macierzy głównej A jest niesprzeczny jest podprzestrzenią liniową; uzasadnij, że wymiar tej podprzestrzeni plus wymiar przestrzeni rozwiązań układu jednorodnego o tej samej macierzy głównej A jest równy liczbie kolumn A.
10. Znajdź jawny wzór na n-ty wyraz ciągu zadanego rekurencyjnie przez $a_0 = 3$, $a_1 = 4$, $a_2 = 6$, $a_3 = 10$, $a_{n+4} = 4a_{n+3} + a_{n+2} - 16a_{n+1} + 12a_n$.
11. Zgadnij, a następnie udowodnij indukcyjnie, wzór na $\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}^n$. (Wsk. Policz $\begin{pmatrix}\lambda & 1\\0 & \lambda\end{pmatrix}^n$ dla kilku początkowych wartości n.)