Algebra liniowa 1B, Lista 10

18.XII o 15^{00} w sali HS odbędzie się kartkówka, a potem wykład. 22.XII zajęć nie będzie.

Ćwiczenia (kartkówka 18 grudnia)

1. Udowodnij bezpośrednim rachunkiem wzór $\|A \times B\| = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \sin(\angle(A, B))$. Wsk.: użyj wzorów $\langle A, B\rangle = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \cos(\angle(A, B))$, $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.
2. Niech $k < l$. Uzasadnij, że (a) jeśli $X_1, \ldots, X_l$ są lnz, to $X_1, \ldots, X_k$ są lnz; (b) jeśli $X_1, \ldots, X_k$ są lz, to $X_1, \ldots, X_l$ są lz.
3. Uzasadnij szczegółowo równoważność podanych na wykładzie definicji liniowej niezależności.
4. Zauważ, że jeśli pewne dwa spośród wektorów $X_1, \ldots, X_l$ są równe, to $X_1, \ldots, X_l$ są lz.
5. Wylicz wzór $\det(M) = \det(M^\top)$ (dla macierzy 3×3).
6. Jaka jest największa możliwa wartość wyznacznika 3×3, którego każdy wyraz jest równy 0 lub 1?
7. Sprawdź na możliwie wiele róznych sposobów czy następujące układy wektorów są liniowo niezależne: (a) $(1, 1, 0)^\top$, $(0, 1, 1)^\top$, $(1, 0, 1)^\top$; (b) $(1, 0, 1)^\top$, $(0, 1, 0)^\top$; (c) $(1, 2, -3)^\top$, $(-1, -1, 2)^\top$, $(3, -2, -1)^\top$.
8. Rozwiązując układ równań przedstaw pierwszy z podanych wektorów w postaci kombinacji liniowej pozostałych (lub stwierdź, że się nie da):
   (a) $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix}$;
   (d) $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$;
9. Oblicz wyznaczniki:
   $\begin{vmatrix}1&2&3\\5&1&4\\3&2&5\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}-1&5&4\\3&-2&0\\-1&3&6\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}a&d&e\\0&b&f\\0&0&c\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&1&-1\\3&5&5\\-2&2&2\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}a&-1&0\\b&x&-1\\c&0&x\end{vmatrix}$.
10. O wektorze U wiadomo, że: (1) jest wektorem wodzącym punktu leżącego na płaszczyźnie $x-y+2z+3 = 0$, (2) jest prostopadły do wektora $W = (1, 0, -3)^\top$, (3) równoległościan zbudowany na wektorach U, W, $(-2, -1, 1)^\top$ ma objętość 72. Znajdź U.

Zadania (kartkówka 5 stycznia)

1. Udowodnij, że dowolne 4 wektory w $\mathbf{R}^3$ zawsze są lz.
2. Które z następujących warunków są równoważne liniowej niezależności wektorów $X_1, X_2, X_3 \in \mathbf{R}^3$? Podaj dowód równoważności lub kontrprzykład.
   a) X_1, X_2 są niewspółliniowe, zaś X_3 nie jest ich kombinacją liniową.
   b) żadne dwa spośród X_1, X_2, X_3 nie są współliniowe.
   c) X_1 nie jest kombinacją liniową X_2, X_3; X_2 nie jest kombinacją liniową X_1, X_3; ponadto $X_3 \neq 0$.
3. Udowodnij, że jeśli $X \perp Y \perp Z \perp X$ oraz $X, Y, Z \neq 0$, to X, Y, Z są lnz.
4. Załóżmy, że każdy wyraz pewnego wyznacznika 3×3 jest co do modułu nie większy niż 1. Udowodnij, że wartość tego wyznacznika jest < 6. Czy potrafisz wzmocnić tą nierówność?
5. Udowodnij, że proste $X = A + tB$, $X = C + tD$ zawierają się w pewnej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy gdy $\langle A, B \times D\rangle = \langle C, B \times D\rangle$. Używając tego warunku stwierdź, czy proste $X = (1, 1, 2)^\top + t(7, 1, 0)^\top$, $X = (-6, 0, 2)^\top + t(1, 0, 1)^\top$ leżą w jednej płaszczyźnie. Jeśli tak, znajdź równanie tej płaszczyzny.
6. Dwie proste w $\mathbf{R}^3$ mogą się przecinać, być równoległe, lub ani jedno ani drugie (wtedy nazywamy je skośnymi). Dla każdej z tych trzech możliwości ułóż możliwie dużo zadań pytających o kąty/punkty/płaszczyzny/proste. Podaj (możliwie nietrywialne) przykłady pary prostych (a) przecinających się, (b) równoległych, (c) skośnych. Dla tych przykładów rozwiąż ułożone przez siebie (i kolegów) zadania.
7. Oblicz odległość punktu $(1, 2, 3)^\top$ od (a) prostej $\frac{x-1}{3} = \frac{2y+4}{3} = \frac{z+1}{1}$; (b) płaszczyzny $2x - y + 2 = 5$. Użyj geometrycznej interpretacji wyznacznika.
8. Dla każdej ściany F pewnego wielościanu wypukłego narysowano wektor N_F prostopadły do F, skierowany na zewnątrz wielościanu (jeśli zaczepić go gdzieś w środku ściany F), o długości równej polu ściany F. Pokaż, że suma wszystkich narysowanych wektorów jest równa 0. (W razie kłopotów przelicz to zadanie dla czworościanu używając iloczynu wektorowego.)
9. Udowodnij, że $(\forall A, B \in \mathbf{R}^3)(\|A\| = 1 \Rightarrow A \times B = A \times (A \times (A \times (A \times (A \times B)))))$.
10. (T.Stachowiak, J.Wieszaczewski) Ile k-wymiarowych ścian ma n-wymiarowy równoległościan?