Algebra liniowa 1B, Lista 11

Ćwiczenia (kartkówka 5 stycznia)

1. Rozwiąż poniższe układy Swoim ulubionym sposobem, jak również używając wzorów Cramera.
$(a)\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x+2y+z=0 \\ x+y+2z=9 \end{cases}$ $(b)\begin{cases} x+y+z=6 \\ -x+y+z=0 \\ x-y+z=2 \end{cases}$ $(c)\begin{cases} 2x-y-z=4 \\ 3x+4y-2z=11 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$
2. Wyznacz wielomian $f(x)$ drugiego stopnia, taki że $f(1)=8$, $f(-1)=2$, $f(2)=14$.
3. Znajdź macierz (a) rzutu (prostokątnego) na płaszczyznę $3x+2y-z=0$; (b) rzutu (prostokątnego) na prostą $X=t(1,0,-7)^\top$; (c) symetrii względem prostej $X=t(-1,2,1)^\top$.
4. Napisz macierze obrotów o kąt θ wokół osi OX i wokół osi OY. Dla $\theta=\pi/2$ oblicz złożenia tych obrotów w obu możliwych kolejnościach.
5. Uzasadnij: $\ker(F\circ G)\supseteq\ker(G)$, $\mathrm{Im}(F\circ G)\subseteq\mathrm{Im}(F)$.
6. Sprawdź, że $\det(A+B,B+C,C+A)=2\det(A,B,C)$, $(x-y)(y-z)(z-x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$.
7. Sprawdź, czy podane układy wektorów są dodatnio czy ujemnie zorientowane:
(a) $(1,6,3)^\top$, $(-1,0,2)^\top$, $(2,1,1)^\top$ (b) $(1,6,3)^\top$, $(2,-1,1)^\top$, $(-1,7,2)^\top$
8. Uzasadnij, że jeśli układ A, B, C jest dodatnio zorientowany, to również układy $-A$, $-B$, C; $A+B$, B, C są dodatnio zorientowane.
9. Znajdź nieparametryczne równania opisujące obrazy i jądra przekształceń $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^k$ o następujących macierzach: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
10. Znajdź M^{-1}. Wypróbuj wszelkie znane Ci sposoby. $M=$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Zadania (kolokwium 13 stycznia)

1. Niech $F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ i $G:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ będą odwzorowaniami liniowymi.
   a) Uzasadnij, że F nie jest na.
   b) Uzasadnij, że G nie jest $1-1$.
   b) Uzasadnij, że $F\circ G$ nie jest odwracalne.
2. Niech $\Psi:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ będzie odwzorowaniem liniowym. Pokaż że istnieje wektor $A\in\mathbf{R}^3$ (zależący od Ψ), taki że $\Psi(X)=\langle X,A\rangle$.
3. Niech ℓ będzie prostą $X=(0,3,0)^\top+t(-1,1,2)^\top$. Znajdź prostą przechodzącą przez $(1,0,1)^\top$ i przecinającą ℓ pod kątem prostym.
4. Znajdź macierz obrotu o $2\pi/3$ wokół prostej $x=y=z$. (Wsk. Są dwa takie obroty; wybierz sobie jeden z nich. Znajdź 3 liniowo niezależne wektory, których obrazy przez ten obrót potrafisz znaleźć.)
5. Podaj przykłady przekształceń liniowych $F,G:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$, takich że (a) $\ker(F)\subset\mathrm{Im}(F)$ (b) $\mathrm{Im}(G)\subset\ker(G)$. Postaraj się znaleźć zarówno nietrywialne, jak i trywialne przykłady.
6. Niech $M,N\in M_{3\times3}$, przy czym $\det(MN)\neq0$. Pokaż, że macierze M i N są odwracalne.
7. Czy prawdziwe są (dla odwracalnych macierzy 3×3) wzory: $(MN)^{-1}=M^{-1}N^{-1}$, $(M+N)^{-1}=M^{-1}+N^{-1}$, $\det(aM)=a\det(M)$, $\det(M+N)=\det(M)+\det(N)$?
8. Uzasadnij, że dla dowolnego wektora $A\in\mathbf{R}^3$ przekształcenie M_A zadane wzorem $M_A(X)=A\times X$ jest liniowe. Wyraź jego macierz przez współrzędne wektora A.
9. W oznaczeniach poprzedniego zadania, znajdź macierz przekształcenia $M_A\circ M_B-M_B\circ M_A$ (wyraź jej wyrazy przez współrzędne A, B). Przyjrzyj się tej macierzy uważnie.
10. Uzasadnij, że dowolną macierz kwadratową można sprowadzić do postaci górnotrójkątnej (wyrazy pod przekątną $=0$) przez wielokrotne użycie następujących operacji:
    a) Dodanie skalarnej krotności pewnej kolumny do innej kolumny;
    b) zamiana miejscami dwóch kolumn.
    Wypróbuj Swoją strategię na następującej macierzy:
    $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
    Zrób to samo używając wierszy zamiast kolumn. Porównaj iloczyny wyrazów na przekątnych w otrzymanych macierzach górnotrójkątnych.