Algebra liniowa 1B, Lista 12

Wszystkie macierze których rozmiar nie jest explicite określony to macierze 3×3.

Ćwiczenia (kolokwium 13 stycznia)

1. Uzasadnij następujące wzory. Załóż, że występujące w nich macierze odwrotne istnieją. a) $(M^{-1})^{-1} = M$; b) $\det(MNM^{-1}) = \det(N)$; c) $(\lambda I - M)^{-1} - (\mu I - M)^{-1} = (\lambda - \mu)(\mu I - M)^{-1}(\lambda I - M)^{-1}$; d) $\det(M^{-1}) = (\det(M))^{-1}$.
2. Znajdź postać ogólną rozwiązania układu $AX = Y$ (a) dla: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -6 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$; $Y = (0,0,0)^\top, (1,1,1)^\top, (1,-2,3)^\top, (-6,-3,3)^\top, (2,4,2)^\top$, $(-1,3,0)^\top, (1,0,3)^\top, (1,3,0)^\top, (4,12,-8)^\top$; (b) dla $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$; $Y = \binom{0}{0}, \binom{2}{0}, \binom{-5}{15}, \binom{90}{-30}$.
3. Udowodnij, że jeśli układ $AX = Y$ ma dwa rozwiązania, to ma ich nieskończenie wiele.
4. Znajdź wartości i wektory własne. Porównaj krotność pierwiastka wielomianu charakterystycznego z maksymalną możliwą liczbą odpowiadających jej liniowo niezależnych wektorów własnych. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
5. Znajdź wektory i wartości własne dla (a) obrotu o kąt θ wokół pewnej prostej; (b) rzutu na prostą; (c) rzutu na płaszczyznę; (d) symetrii względem prostej; (e) symetrii względem płaszczyzny. (O wszystkich prostych i płaszczyznach o których mowa w tym zadaniu zakładamy, że przechodzą przez 0.)
6. Wektory $(1,-2,2)^\top, (-3,0,1)^\top, (7,1,0)^\top$ są wektorami własnymi przekształcenia liniowego $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ o wartościach własnych odpowiednio $-1, -3, 2$. Znajdź macierz M tego przekształcenia.
7. O liniowych przekształceniach $F, G, H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ wiadomo, że: $F \circ G \circ H$ jest na, $\det(G) = -4$, $H = F \circ G \circ F$. Udowodnij, że F jest różnowartościowe.
8. Znajdź wszystkie wymierne pierwiastki wielomianów. Stwierdź też, ile mają one pierwiastków rzeczywistych. (a) $x^3 + 5x^2 + 2x - 8$, (b) $x^3 + 5x^2 + 5x + 4$, (c) $2x^3 - 10x^2 + 7x + 3$, (d) $6x^3 + 7x^2 - x - 2$, (e) $-x^3 - 7x^2 + 3x + 27$, (f) $-x^3 + 7$, (g) $2x^3 - (1 + 2\sqrt{2})x^2 + (\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{2}$.

Zadania (kartkówka 19 stycznia)

1. Udowodnij wzór $\det(MN) = \det(M)\det(N)$.
   a) Załóżmy, że $\Phi : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ jest 3-liniowa i antysymetryczna. Udowodnij, że dla pewnej liczby rzeczywistej C zachodzi $\Phi = C \cdot \det$.
   b) Ustalmy pewną macierz A i rozważmy funkcję $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \ni (X, Y, Z) \mapsto \det(AX, AY, AZ) \in \mathbf{R}$. Udowodnij, że funkcja ta jest 3-liniowa i antysymetryczna.
   c) Niech A,B będą macierzami, zaś B_1, B_2, B_3 niech oznaczają kolumny macierzy B. Zauważ, że $\det(AB) = \det(AB_1, AB_2, AB_3)$. Wywnioskuj wzór $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
2. Oblicz wyznacznik macierzy $\begin{pmatrix} 121 & -248 \\ -321 & 625 \\ 144 & -91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 321 & 231 & 123 \\ -619 & 26 & -17 \end{pmatrix}$. (Wsk. Niczego nie licz.)
3. Uzasadnij, że jeśli $N^3 = 0$, to $(I + N)^{-1} = I - N + N^2$. Użyj tego wzoru by policzyć $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.
4. Macierze A i A^{-1} mają całkowite wyrazy. Co wynika stąd o $det(A)$?
5. Uzasadnij, że istnieje $\epsilon > 0$, taki że jeśli macierz N spełnia warunek: $(\forall i, j \in \{1,2,3\})(|N_{ij}| < \epsilon)$, to macierz $I + N$ jest odwracalna. Czy potrafisz podać jakąś konkretną wartość ϵ spełniającą powyższą tezę (im większa tym lepsza)?
6. Niech $X, Y, Z \in \mathbf{R}^3$ będą niezerowymi wektorami, A macierzą, zaś $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ dwoma różnymi liczbami, przy czym $AX = \lambda X$, $AY = \lambda Y$, $AZ = \mu Z$. Udowodnij, że jaśli X, Y są lnz, to X, Y, Z są lnz.
7. Zdiagonalizuj macierz M: znajdź wartości własne i bazę wektorów własnych; zapisz M w postaci PDP^{-1} z diagonalnym D; znajdź nowe współrzędne w których macierz M staje się diagonalna; wyraź nowe współrzędne przez stare, a stare przez nowe. $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$ – która z tych macierzy diagonalizuje się, a która nie?

9. Niech ciąg (a_n) będzie zadany rekurencyjnie: $a_0 = 1$, $a_1 = 7$, $a_2 = -1$, $a_{n+3} = 4a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n$. Wyprowadź jawny wzór na n-ty wyraz tego ciągu.

10. Niech $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ będzie liniowe. Uzasadnij, że jeśli $\ker(F)$ jest płaszczyzną, to $\mathrm{Im}(F)$ jest prostą.