**Algebra liniowa 1B, Lista 13**

**Ćwiczenia** ( kartkówka 19.I)

1. Napisz co najmniej trzy macierze izometrii w których pierwszym wierszem jest $(3/5, \sqrt{7}/5, -3/5)$.
2 Mówimy, że przekształcenie liniowe $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ zachowuje (zmienia) orientację, jeśli dla każdego dodatnio zorientowanego układu wektorów $U, V, W$ układ $F(U), F(V), F(W)$ jest dodatnio (ujemnie) zorientowany. Użyj pierwszego zadania z poprzedniej listy by uzasadnić następujące fakty:
   a) $F$ zachowuje (zmienia) orientację wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(F)$ jest dodatni (ujemny).
   b) Jeśli dla pewnego dodatnio zorientowanego układu wektorów $U, V, W$ układ $F(U), F(V), F(W)$ jest dodatnio (ujemnie) zorientowany, to $F$ zachowuje (zmienia) orientację.
   c) Złożenie dwóch przekształceń zmieniających orientację zachowuje orientację.

   Używając b) sprawdź, które z liniowych izometrii $\mathbf{R}^3$ zachowują, a które zmieniają orientację. Uzasadnij, że zachowująca orientację liniowa izometria $\mathbf{R}^3$ jest obrotem.
3. Niech $A$ będzie liniową izometrią $\mathbf{R}^3$ zmieniającą orientację, taką że liczba 1 jest jej wartością własną. Uzasadnij, że $A$ jest odbiciem względem pewnej płaszczyzny.
4. Uzasadnij, że złożenie dwóch obrotów (wokół prostych przechodzących przez 0) jest obrotem.
5. Uzasadnij, że jeśli $X^\top AY = X^\top BY$ (dla ustalonych macierzy $A, B$ tego samego rozmiaru, i wszystkich $X, Y$ dla których wzór ma sens), to $A = B$.
6. Niech $A$ będzie jednostkowym wektorem. Wyraź kąty $\phi$, $\psi$ o których mowa w zadaniu 4 przez współrzędne wektora $A$.
7. Znajdź macierz obrotu o $\frac{\pi}{6}$ wokól prostej $x = -y = \frac{z}{3}$, w którąkolwiek stronę. Następnie wytłumacz komuś w którą stronę obracałeś.
8. Znajdź macierz złożenia obrotu prawoskrętnego wokół prostej $X = t(2,1,2)^\top$ o kąt $\frac{\pi}{4}$ ( przekształcenia $R_{(2,1,2)^\top, \frac{\pi}{4}}$) i odbicia w płaszczyźnie prostopadłej do osi tego obrotu.
9. Ślad pewnej izometrii wynosi $-3$. Co to za izometria?
10. Znajdź macierz izometrii liniowej $F$, takiej że $F((2,2,-1)^\top) = (0,3,0)^\top$.

**Zadania** (egzamin 17.II)

1. Przeczytaj dowód liniowości izometrii $\mathbf{R}^2$ zachowujących 0 i zaadaptuj go do $\mathbf{R}^3$.
2. Dla przekształceń z listy klasyfikacyjnej izometrii $\mathbf{R}^3$ oblicz wyznaczniki. (Wsk. Zrób to dla ich macierzy w dogodnie wybranym układzie współrzędnych, a następnie użyj wzoru $\det(PAP^{-1}) = \det(A)$.)
3. Niech $A \in \mathbf{R}^3$ tworzy kąt $\psi$ z wektorem $E_3$, $0 \leq \psi \leq \pi$. Niech rzut $A$ na płaszczyznę $XY$ tworzy zorientowany kąt $\phi$ z $E_1$, $-\pi \leq \phi \leq \pi$ (tzn. zakładamy że rzut $A$ na płaszczyznę $XY$ ma ten sam kierunek i zwrot co $R_{E_3,\phi}(E_1)$). Uzasadnij wzór
$$R_{A,\theta} = R_{E_3,\phi} \circ R_{E_2,\psi} \circ R_{E_3,\theta} \circ R_{E_2,-\psi} \circ R_{E_3,-\phi}.$$
   Znajdź macierz przekształcenia $R_{A,\theta}$.
4. Następujące przekształcenia są izometriami $\mathbf{R}^3$; przedstaw każde z nich jako złożenie translacji i izometrii liniowej. Znajdź macierz części liniowej i sprawdź, że jest ona ortogonalna. (a) odbicie względem płaszczyzny $x + z = 1$; (b) odbicie względem prostej $x = z = 1$; (c) obrót o $\pi/2$ wokół prostej $y = z = 1$ (są dwa takie obroty; wybierz dowolny z nich).
5. Znajdź macierz izometrii liniowej $F$, takiej że $F((2,2,-1)^\top) = (1,-1,\sqrt{7})^\top$. Ile jest takich izometrii?
6. Załóżmy, że $\|U\| = \|V\| = 1$, $U \perp V$. Niech $\Pi$ będzie płaszczyzną $\{tU + sV : t, s \in \mathbf{R}\}$. Uzasadnij, że rzut prostopadły na $\Pi$ jest dany wzorem $X \mapsto \langle X, U\rangle U + \langle X, V\rangle V$. Użyj tego wzoru by policzyć macierz rzutu prostopadłego na płaszczyznę $x - y + z = 0$. Policz też tę macierz inną metodą, i porównaj wyniki.
7. Które macierze $2 \times 2$ dają się rozszerzyć do macierzy izometrii rozmiaru $3 \times 3$? Spróbuj sformułować różne warunki konieczne i różne warunki dostateczne.
8. Uzasadnij, że każda izometria $\mathbf{R}^3$ jest złożeniem co najwyżej czterech odbić (w płaszczyznach).
9. Jak może wyglądać zbiór wszystkich wartości własnych liniowej izometrii $\mathbf{R}^3$? Opisz wszystkie możliwości. Uwzględnij zespolone wartości własne.
10. Niech $\alpha, \beta, \gamma : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$. Załóżmy, że $\alpha(0) = \beta(0) = \gamma(0)$, oraz że
$$\forall X, Y \in \mathbf{R}^3, d(X,Y) = \sqrt{(\alpha(X) - \alpha(Y))^2 + (\beta(X) - \beta(Y))^2 + (\gamma(X) - \gamma(Y))^2}.$$
   Uzasadnij, że $\alpha, \beta, \gamma$ jest liniowym układem współrzędnych. (Wsk. Stwierdź, że odwzorowanie $X \mapsto (\alpha(X), \beta(X), \gamma(X))^\top$ jest zachowującą 0 izometrią $\mathbf{R}^3$; jest to więc przekształcenie liniowe.)