**Algebra liniowa 1B, lista 14**

**Zadania i Ćwiczenia** (egzamin 17 lutego)

1. Niech $A$ i $B$ będą symetrycznymi macierzami kwadratowymi rozmiaru $n \times n$, takimi że $(\forall X \in \mathbf{R}^n)(\langle AX, X\rangle = \langle BX, X\rangle)$. Udowodnij, że $A = B$
2. Napisz formę kwadratową $Q$ na $\mathbf{R}^3$, taką że $Q((1,2,3)^\top) = -7$.
3. Niech $Q((x,y,z)^\top) = xy + yz + zx$. Wskaż wektor $U$, taki że: (a) $Q(U) = 1$; (b) $Q(U) = -1$; (c) $Q(U) = 0$.
4. Podaj przykład formy kwadratowej $Q$ na $\mathbf{R}^3$, takiej że $Q(E_1), Q(E_2), Q(E_3) > 0$, ale dla pewnego $U \in \mathbf{R}^3$ mamy $Q(U) < 0$.
5. Niech $Q$ będzie formą kwadratową na $\mathbf{R}^2$, zaś $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ przekształceniem liniowym. (a) Sprawdź, że $Q \circ F$ jest formą kwadratową na $\mathbf{R}^3$. (b) Pokaż, że 0 jest jednym ze współczynników w postaci kanonicznej formy $Q \circ F$.
6. Niech $Q$ będzie formą kwadratową na $\mathbf{R}^2$, zaś $U, V \in \mathbf{R}^3$ będą takie, że $Q(U) = -Q(V) = 1$. Udowodnij, że istnieje nieprzeliczalnie wiele wektorów $W \in \mathbf{R}^3$, takich że $Q(W) = 0$.
7. Podaj przykład macierzy symetrycznej $S$ rozmiaru $3 \times 3$ oraz jej trzech liniowo niezależnych wektorów własnych, z których żadne dwa nie są prostopadłe.
8. Załóżmy, że macierz $S \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$ jest antysymetryczna, tzn. $S^\top = -S$. (a) Uzasadnij, że istnieje ortonormalny układ $X, Y, Z \in \mathbf{R}^3$, taki że $SX = \lambda X$, $SY = \mu Z$, $SZ = -\mu Y$ (zacznij tak, jak na wykładzie dla macierzy symetrycznych). (b) Napisz macierz $F_S$ w układzie współrzędnych związanym z bazą $X, Y, Z$.
9. Pokaż, że układ współrzędnych, o którym mowa w zadaniu 10 z poprzedniej listy, jest prostokątny.
10. Naszkicuj powierzchnie: $x^2 = 0$, $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 0$, $x^2 + z^2 = 0$, $x^2 + z^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $-x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z - y^2 = 0$.
11. Sprowadź poniższe powierzchnie do postaci kanonicznej: napisz macierz odpowiedniej formy kwadratowej; znajdź wartości własne i bazę ortonormalną wektorów własnych; napisz postać kanoniczną równania i macierze $P$ i $P^{-1}$ wiążące współrzedne $x, y, z$ ze współrzędnymi $u, v, w$ w których postać równania jest kanoniczna. Zidentyfikuj powierzchnię, naszkicuj ją na tle układu współrzędnych $uvw$. Odczytaj z postaci kanonicznej równania jej własności geometryczne (długości półosi, symetrię obrotową lub jej brak, odległość między powłokami, kąty półrozwarcia stożka asymptotycznego itp.). Opisz też położenie powierzchni względem układu $xyz$ (podając kierunki półosi, osi symetrii obrotowej lub osi stożka asymptotycznego itp.).
    (a) $x^2 - 5y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz = 3$,
    (b) $-4x^2 + 2y^2 + 3yz + 2z^2 = 1$,
    (c) $x^2 - 4y^2 - 4yz - z^2 = 0$,
    (d) $6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz = 0$,
    (e) $11x^2 + 4xy - 16xz + 2y^2 + 20yz + 5z^2 = 9$,
    (f) $-2xz + y^2 = 1$,
    (g) $5x^2 - 2xy - 2xz + 5y^2 - 2yz + 5z^2 = 3$,
    (h) $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2zy = 0$,
    (i) $3x^2 - 4xy - 8xz + 2y^2 + 8yz + 8z^2 = 1$,
    (j) $2x^2 - 8xy + 8y^2 + 12xz - 24yz + 18z^2 = 1$.
12. Wiadomo, że powierzchnia stopnia 2 zadana równaniem $ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2 + g = 0$ może być elipsoidą, hiperboloidą jednopowłokową, hiperboloidą dwupowłokową, ... Uzupełnij tę listę rozważając wszystkie możliwe postacie kanoniczne powyższego równania. Uwzględnij także przypadki zdegenerowane, jak np. punkt.
13. Przedstaw elipsoidę o długościach półosi $a$, $b$, $c$ jako obraz sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ przez odpowiednie przekształcenie liniowe $\mathbf{R}^3$. Znając wzór na objętość kuli i wiedząc jak zmienia się objętość pod wpływem przekształcenia liniowego oblicz objętość obszaru ograniczonego tą elipsoidą.
14. Zbadaj, czy na hiperboloidzie jednopowłokowej $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ leżą jakieś proste.
15. Dla poniższych wielomianów znajdź liczbę pierwiastków dodatnich i liczbę pierwiastków ujemnych (i stwierdź czy 0 jest pierwiastkiem). Określ też krotności pierwiastków. (Wsk. Zróżniczkuj wielomian; znajdź jego ekstrema, przedziały monotoniczności, wartości wielomianu na końcach tych przedziałów i wartość w 0. Często zamiast tej procedury wystarczy policzyć wartości w kilku sprytnie zgadniętych punktach.)
    (a) $-x^3 + 7x^2 + 2x - 1$,
    (b) $x^3 - 4x^2 + 17x - 1$,
    (c) $x^3 + 3x$,
    (d) $x^3 + x^2 - 8x - 12$,
    (e) $x^3 + 2x^2 - x + 2$,
    (f) $x^3 + x^2 + x + 3$.
16. Zidentyfikuj powierzchnię (np. jako elipsoidę, parę płaszczyzn itp.), nie znajdując dokładnych wartości współczynników postaci kanonicznej a jedynie określając ich znaki.
    (a) $x^2 - 2xy + 2y^2 + 4xz + 3z^2 = 1$,
    (b) $x^2 - 2xy + 2xz + 4yz + 3z^2 = 0$,
    (c) $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2xz + 2yz + 4z^2 = 1$,
    (d) $-2x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 6yx - 2z^2 = 1$.
17. Podaj przykład równania stopnia 2 trzech zmiennych którego zbiór rozwiązań jest prostą w $\mathbf{R}^3$.