Algebra liniowa 1B, lista 15

Zadania i Ćwiczenia (egzamin 17 lutego)

1. Prześledź kawałek dowodu tw. Jordana podany na wykładzie i skonstatuj, że jeśli A ma wyrazy rzeczywiste i dokładnie dwie wartości własne (które wtedy już muszą być rzeczywiste – dlaczego?), to można znaleźć macierze $P, J \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$ spełniające tezę tw. Jordana.
2. Załóżmy, że macierze $A, B \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$ mają obie wielomian charakterystyczny $(3-x)(5-x)^2$, ale żadna z nich nie diagonalizuje się. Wykaż, że istnieje odwracalną macierz $P \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$, taka że $A = PBP^{-1}$. (Rozwiąż to zadanie najpierw dla macierzy zespolonych; w przypadku rzeczywistym użyj poprzedniego zadania.)
3. Uzasadnij, że jeśli macierz $A \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$ ma nierzeczywistą wartość własną, to A diagonalizuje się (nad $\mathbf{C}$).
4. (a) Dla $t \in \mathbf{R}$ uzasadnij wzór $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ rozwijając obie strony w szereg potęgowy. (b) Uzasadnij wzór $e^{z+w} = e^z e^w$ używając szeregów potęgowych (ten dowód działa też dla wykładników zespolonych). (c) Pokaż, że $e^{a+bi} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$.
5. Używając w odpowiednim momencie poprzedniego zadania oblicz $\exp\left[t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\right]$ $(t \in \mathbf{R})$.
6. Sprowadź do postaci Jordana: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.
7. Oblicz: $\exp\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\exp\left[t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$, $\sin\begin{pmatrix} \pi - 1 & 1 \\ -1 & \pi + 1 \end{pmatrix}$.
8. Wyprowadź wzór na $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.
9. Dla poniższych powierzchni: znajdź postać kanoniczną równania; nazwij powierzchnię; znajdź prostokątny (niekoniecznie liniowy) układ współrzędnych X', w którym równanie powierzchni jest kanoniczne, tzn. wyznacz macierz izometrii P i wektor T, takie że $X' = PX + T$; naszkicuj powierzchnię w układzie X'; określ położenie powierzchni na tle standardowego układu (zdaniami typu: " osią symetrii obrotowej rozpatrywanej hiperboloidy jest prosta $X = (1,2,3)^\top + t(3,4,5)^\top$")
   (a) $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 2z - 1 = 0$,
   (b) $4x^2 - y^2 - z^2 + 32x - 12z + 44 = 0$,
   (c) $z^2 = 2xy$,
   (d) $2xy + 2yz + 2zx + 2x + 2y + 2z + 1 = 0$,
   (e) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz - 2zx - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$,
   (f) $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy - 8xz + 4yz - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$,
   (g) $4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4xz + 4yz - 16x - 16y + 10z - 2 = 0$.

Ze " Zbioru zadań z algebry" pod red. Kostrykina (PWN 1995) nadają się w tej chwili następujące:
z części I: 1.4.*;2.1.11;2.3.2fhi;2.3.6-7; 3.1.*;3.3.1-4,7,8;3.4.3;3.5.2;3.6.1;3.7.2,3,4b; 3.8.1;4.1.1-7,9-12; 4.2.1-3,7; 4.3.4,5,6a,7,10,11,13-29; 6.1.*;6.2.*;6.3.*;6.4.1,2,3abc,6-13; 6.5.*;6.6.*;7.1.1-7;7.2.1abcd,2-8.
z części II: 1.1.1,2a;3.1.2;3.2.3-7,9,11-16,19; 3.3.1ab,5-8,10ab,16-19,43; 4.3.4a-e,18a-e; 4.4.3,5; 6.4.15,16,18,22-27.
Niektóre z nich będą wymagać przyjęcia $n = 3$, inne sprawdzenia pewnych definicji. Niektóre kawałki materiału są na tej liście nadreprezentowane, inne zupełnie nieobecne.

Literatura (ciąg dalszy):
Matematyka w szkole średniej (3 tomy), rozdziały 14,18,21,26,32,40. (Jest w bibliotece, ma sygnaturę 33850. Prosiłbym o używanie na miejscu, aby dać szansę innym. Chodzi o brytyjską szkołę średnią.)