Algebra liniowa 1B, Lista 2

Ćwiczenia (Kartkówka 21 października)

1. Przedstaw wektor $\binom{4}{-2}$ jako kombinację liniową wektorów $\binom{1}{1}$ i $\binom{-1}{1}$.
2. Dane są wektory $A = \binom{1}{0}$, $B = \binom{1}{1}$, $C = \binom{-1}{0}$. O ile to możliwe, przedstaw (a) A jako kombinację liniową B i C, (b) B jako kombinację liniową A i C, (c) C jako kombinację liniową B i A.
3. Dla jakich x następujące pary wektorów są liniowo zależne?
(a) $\binom{x}{1}, \binom{9}{3}$, (b) $\binom{x}{x^2}, \binom{-2}{4}$, (c) $\binom{x}{1}, \binom{4}{x}$, (d) $\binom{x}{x^2}, \binom{1}{x}$.
4. Uzasadnij, że jeśli U i V są liniowo niezależne, to rownież U i $U+V$ są liniowo niezależne.
5. Wiadomo, że $\det\left(\binom{1}{0}, U\right) = 1$ oraz że $\|U\| = 2$. Co można powiedzieć o U?
6. Sprawdź własności wyznacznika podane na wykładzie. Sprawdź poprawność wzorów Cramera.
7. Czy para wektorów $U = \binom{-3}{2}$, $V = \binom{-4}{3}$ jest dodatnio zorientowana? Oblicz pole równoległoboku rozpiętego przez wektory U i V jak również pole trójkąta OUV.
8. Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $\binom{-5}{2}$, $\binom{1}{4}$, $\binom{3}{-6}$.
9. Dla jakich a, b układ równań $\begin{cases} -2x + 3y = a \\ 4x - 6y = b \end{cases}$ ma rozwiązanie?
10. Używając wzorów wyznacznikowych znajdź rozwiązanie układu równań $\begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ 4x + 6y = -2 \end{cases}$.

Zadania (kartkówka 28 października)

1. Dane są dwa wierzchołki równoległoboku $A = \binom{2}{5}$ i $B = \binom{5}{1}$ oraz jego pole $s = 17$. Wyznacz współrzędne dwóch pozostałych wierzchołków wiedząc, że punkt przecięcia przekątnych znajduje się na osi OY.
2. Niech $A = \binom{-2}{-3}$, $B = \binom{3}{2}$, $M = \binom{2}{0}$, $N = \binom{-4}{1}$. Rozważając znaki stosownych wyznaczników, rozstrzygnij czy punkty M i N leżą po tej samej stronie prostej AB.
3. Czy istnieją na płaszczyźnie wektory U, W, takie że $\langle U, W\rangle = 3$, $\|U\| = 4$, $\|W\| = 5$? Co gdy trójkę 3,4,5 zastąpimy przez 3,2,1? Uogólnij.
4. Przedyskutuj istnienie i liczbę rozwiązań układu 2 równań liniowych z dwiema niewiadomymi w przypadku, gdy wyznacznik główny jest równy 0. Staraj się formułować swe tezy na możliwie wiele sposobów (w terminach: przecinania się prostych; liniowej zależności wektorów; zerowania się wyznaczników W_x, W_y, W). Podaj przykłady.
5. Udowodnij, że układ 2 równań liniowych z dwoma niewiadomymi, o zerowych prawych stronach, ma niezerowe rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy jego wyznacznik główny jest równy 0.
6. Niech $F : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ będzie funkcją przypisującą parom wektorów liczby rzeczywiste. Załóżmy, że F jest dwuliniowa i antysymetryczna. Udowodnij, że istnieje stała $C \in \mathbf{R}$, taka że $F(U,V) = C \cdot \det(U,V)$.

K.1.a) Pokaż, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

b) Uzasadnij, że jeśli liczba rzeczywista daje sie przedstawić w postaci $a + b\sqrt{2}$ to takie przedstawienie jest jedyne. (mówimy, że liczby $1, \sqrt{2}$ są liniowo niezależne nad $\mathbf{Q}$ – wymiernymi skalarami)

c) Na tablicy napisana jest trójka liczb. Ruch polega na wybraniu jednej z nich i zastąpieniu jej sumą tej liczby i róznicy dwóch pozostałych liczb pomnożonej przez dowolną liczbę wymierną. Rozstrzygnij, czy startując od trójki liczb $0, 1, \sqrt{2}$ przy pomocy takich ruchów można otrzymać trójkę (nieuporządkowaną) $0, \sqrt{2}, 2$.

d) Rozpatrz poprzedni podpunkt z następującymi modyfikacjami: rozważamy trójki uporządkowane; staramy się przejść od trójki $0, 1, \sqrt{2}$ do trójki $0, \sqrt{2}, 1$.

K.2 Niech $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ będzie przekształceniem różnowartościowym i na (surjektywnym), przy czym $F(0) = 0$. Załóżmy, że obrazem dowolnej prostej przez przekształcenie F jest pewna prosta. Pokaż, że F jest liniowe, wedle następującego planu (lub inaczej):

a) Pokaż, że jest addytywne.

b) Pokaż, że jeśli róznowartościowe $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełnia dla dowolnych x, y warunki: $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$, $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$, to mamy $\phi(x) = x$.

c) Każdą prostą przez 0 można utożsamić z osia liczbową $\mathbf{R}$: należy wybrać równoległy do niej niezerowy wektor U i utożsamić liczbe t z punktem tU (utożsamienie takie zależy oczywiście od wyboru U). Rozważmy prostą ℓ przechodzącą przez 0, wybierzmy równoległy do niej i niezerowy wektor U. Jeśli utożsamić ℓ z $\mathbf{R}$ przy użyciu U, zaś $F(\ell)$ z $\mathbf{R}$ przy użyciu $F(U)$, to ograniczenie F do ℓ można traktować jak funkcję z $\mathbf{R}$ w $\mathbf{R}$. Pokaż, że ta funkcja spełnia warunki poprzedniego podpunktu; wywnioskuj, że F jest jednorodne.

d) Jak należy zmodyfikować tezę, jeśli opuścić założenie $F(0) = 0$?