Algebra liniowa 1B, Lista 4

Ćwiczenia (Kolokwium 4 listopada)

1. Uzasadnij równości: $M(N+P) = MN + MP$, $(M+N)P = MP + NP$, $t(MN) = (tM)N = M(tN)$, $\det(M^{-1}NM) = \det(N)$, $\det(tM) = t^2\det(M)$, $\operatorname{tr}(MN) = \operatorname{tr}(NM)$, $\operatorname{tr}(M+N) = \operatorname{tr}(M) + \operatorname{tr}(N)$, $\operatorname{tr}(M^{-1}NM) = \operatorname{tr}(N)$ (M, N, P są macierzami, $t \in \mathbf{R}$).
2. Sprawdź, że przekształcenia liniowe płaszczyzny z operacjami dodawania i mnożenia przez skalar spełniają aksjomaty przestrzeni liniowej.
3. Dla jakich wartości parametru c macierz $\begin{pmatrix} 2 & c \\ -c & 1 \end{pmatrix}$ ma (a) zero, (b) jedną, (c) dwie wartości własne.
4. Znajdź wielomian charakterystyczny, wartości własne i wektory własne macierzy
(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
5. Niech $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Oblicz A^2, A^3 i A^4. Sformułuj narzucającą się hipotezę, a następnie udowodnij ją indukcyjnie.
6. Sprawdź, że jedyną wartością własną macierzy $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ jest 5. To samo zrób dla macierzy $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Sprawdź, że jedna z tych macierzy diagonalizuje się w bazie wektorów własnych, a druga nie.
7. Przedstaw macierz $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ w postaci PDP^{-1}, gdzie D jest macierzą diagonalną. Zastosuj tę postać do obliczenia 6-tej potęgi macierzy M.
8. Znajdź macierz przekształcenia liniowego, dla którego $\binom{1}{0}$ jest wektorem własnym o wartości własnej $-\frac{1}{2}$, zaś $\binom{1}{1}$ jest wektorem własnym o wartości własnej 1.
9. Podaj przykład liniowego przekształcenia płaszczyzny, które zachowuje pole, zmienia orientację i ma wartość własną π.

Zadania (kartkówka 18 listopada)

1. Które z poniższych przekształceń diagonalizują się (w bazie wektorów własnych)? Dla tych które diagonalizują się, znajdź wartości własne oraz bazę wektorów własnych. (Wsk.: Rozwiązuj to zadanie geometrycznie, bez odwoływania się do macierzy)
(a) R_θ, (b) S_ℓ (ℓ – pewna prosta przechodząca przez O), (c) D_r, (d) P_U.
2. Napisz warunek na liczby a, b, c, d gwarantujący, że macierz $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ma dwie różne wartości własne.
3. Niech $A = PMP^{-1}$. Uzasadnij, że wielomiany charakterystyczne macierzy A oraz M są równe (wsk.: można to zrobić odwołując się do wzorów z ćwiczenia 1). Wywnioskuj, że jeśli macierz M ma dwie różne wartości własne λ, μ, to $\det(M) = \lambda\mu$, $\operatorname{tr}(M) = \lambda + \mu$.
4. Załóżmy, że przekształcenie liniowe E spełnia warunek $E \circ E = E$. Jakie wartości własne może mieć to przekształcenie? Czy koniecznie musi być przekształceniem zerowym lub identycznościowym?
5. Uzasadnij, że jeśli $A = PDP^{-1}$ (gdzie D jest diagonalna), to kolumny P są wektorami własnymi A.
6. Ciąg Fibonacciego jest zadany rekurencyjnie wzorami $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ dla $n \geq 1$. Wyprowadź jawny wzór na n-ty wyraz tego ciągu według następującego planu:
   a) Niech $X_n = \left(\begin{smallmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{smallmatrix}\right)$, $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Pokaż, że $X_0 = \binom{1}{1}$, $X_{n+1} = MX_n$, $X_n = M^n X_0$.
   b) Zdiagonalizuj macierz M: znajdź jej wartości własne i wektory własne i zapisz ją w postaci PDP^{-1}, gdzie D jest macierzą diagonalną.
   c) Znajdź wzór na M^n i wywnioskuj z niego wzór na f_n.
   d) Jak zmieni się odpowiedź, jeśli przyjąć $f_0 = 7$, $f_1 = 3$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ dla $n \geq 1$.
7. Zbadaj, dla jakich a, b macierz $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{smallmatrix}\right)$ ma dwie różne wartości własne. Zbadaj, dla jakich a, b potrafisz znaleźć jawny wzór na n-ty wyraz ciągu zadanego równaniem rekurencyjnym $f_{n+1} = af_n + bf_{n-1}$ ($n \geq 1$), znając f_0 i f_1. Spróbuj zmierzyć się z przypadkiem $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = 2f_n - f_{n-1}$.
8. Załóżmy, że $\det(F - x \cdot Id)$ ma podwójny pierwiastek λ, mimo że F nie jest jednokładnością. Udowodnij, że istnieją liniowo niezależne wektory U, W, takie że $F(U) = \lambda U$, $F(W) = U + \lambda W$. Czy macierz F diagonalizuje się? Jeśli nie, to czy potrafisz wskazać dla niej jakiś substytut diagonalizacji?
9. Załóżmy, że przekształcenie liniowe płaszczyzny A ma dwie różne wartości własne λ, μ. Uzasadnij, że A zachowuje orientację wtedy i tylko wtedy gdy $\lambda\mu > 0$, zaś zmienia orientację wtedy i tylko wtedy gdy $\lambda\mu < 0$. Wywnioskuj, że przekształcenie S_ℓ (gdzie ℓ jest dowolną prostą przechodzącą przez O) zmienia orientację.