Algebra liniowa 1B, Lista 5

Ćwiczenia (Kartkówka 18 listopada)

1. Sprawdź, czy macierz jest macierzą izometrii. Jeśli tak, stwierdź czy jest to macierz obrotu czy symetrii. O jaki kąt / względem której prostej? (Wsk: $(\exists\theta\in\mathbf{R})(a=\cos\theta\wedge b=\sin\theta)\iff(a^2+b^2=1)$).
   (a) $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix}3/5 & 4/5\\ -4/5 & 3/5\end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix}-3/5 & 4/5\\ 4/5 & -3/5\end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,
2. Uzupełnij (na wszystkie możliwe sposoby) do macierzy izometrii: $\begin{pmatrix}* & 3\\ * & *\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}* & *\\ * & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}* & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ * & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$. Które z otrzymanych izometrii zachowują orientację?
3. Uzasadnij, że jeśli λ jest rzeczywistą wartością własną pewnej izometrii liniowej, to $\lambda=\pm1$.
4. Obrazem wektora $\binom{2}{1}$ przez izometrię liniową A jest wektor $\binom{1}{3}$.
   Wyjaśnij, dlaczego powyższe zdanie jest fałszywe.
5. Czy istnieje liniowa izometria A, taka że $A\binom{1}{1}=\binom{1}{-1}$, $A\binom{1}{-1}=\binom{-1}{1}$?
6. Liniowa izometria A przekształca wektor $\binom{1}{0}$ na wektor $\binom{-1/2}{\sqrt{3}/2}$ i zmienia orientację. Znajdź $A\binom{0}{1}$.
7. Złożenie $S_\ell\circ S_k$ jest obrotem ($\ell=\{t\binom{1}{1}:t\in\mathbf{R}\}$; $k=\{t\binom{0}{2}:t\in\mathbf{R}\}$). Znajdź jego macierz i stwierdź, o jaki kąt jest to obrót.
8. Przedstaw w postaci $T_U\circ A$ (a) symetrię względem prostej $x=1$; (b) obrót (w kierunku przeciwzegarowym) o kąt $\pi/2$ wokół punktu $\binom{0}{1}$.
9. Czy zachowuje orientację przekształcenie o macierzy $\binom{1\,3}{3\,4}^{2003}$?
10. Uzasadnij, że złożenie piętnastu liniowych symetrii nie jest obrotem.

Zadania (kartkówka 25 listopada)

1. Zdiagonalizuj macierz $\binom{1\,3}{2\,2}$: znajdź wartości własne; znajdź parę lnz wektorów własnych; opisz związek między standardowymi współrzędnymi a nowymi współrzędnymi pochodzącymi od tej pary. Wykorzystaj owoce Swej pracy do policzenia $\binom{1\,3}{2\,2}^7\binom{1}{-1}$.
2. Niech A będzie izometrią liniową. Uzasadnij, że A jest odwracalne i A^{-1} też jest izometrią.
3. Znajdź macierz symetrii względem prostej $y=ax$.
4. Wyrachuj na macierzach: (a) że $R_\theta\circ S_\ell$ jest symetrią. (b) czym jest $S_\ell\circ R_\theta$. (c) czym jest $S_\ell\circ S_k$.
5. Każda izometria płaszczyzny jest postaci $T_U\circ A$, gdzie A jest izometrią liniową. Zapisz w tej postaci izometrię $(T_X\circ B)\circ(T_Y\circ C)$ (gdzie B, C są izometriami liniowymi).
6. Znajdź wszystkie izometrie liniowe zachowujące oś OX.
7. Każda izometria płaszczyzny jest złożeniem co najwyżej trzech symetrii:
   a) Izometria trzymająca punkty $\binom{0}{0}$, $\binom{1}{0}$, $\binom{0}{1}$ jest identycznością.
   b) Każdą izometrię można złożyć z nie więcej niż trzema symetriami, tak aby otrzymana izometria spełniała założenia a).
   c) Każda izometria płaszczyzny jest złożeniem co najwyżej trzech symetrii.
8. Zbadaj diagonalizowalność symetrii i obrotów.
9. Załóżmy, że A, B, C, D są liniowymi przekształceniami płaszczyzny, przy czym wiadomo, że A i C są obrotami, $\det(D)<0$, $\det(A\circ B\circ C\circ D)>0$ zaś B jest izometrią. Znajdź wartości własne przekształcenia B. Szczegółowo opisz wszystkie kroki swojego rozumowania.
10. Załóżmy, że para wektorów (X,Y) jest ujemnie zorientowana. Zbadaj, jak są zorientowane pary wektorów: (Y,X), $(Y,-X+Y)$, $(X+Y,-X-Y)$, $(X+Y,X-Y)$, $(2X+3Y,-X+Y)$. Sformułuj ogólną zasadę obejmującą wszystkie powyższe przypadki.
11. Udowodnij prawdziwość zdania $(\forall A\in M_{2\times2}(\mathbf{R}))((\exists\lambda,\mu\in\mathbf{R})(\exists P\in M_{2\times2}(\mathbf{R}))(A=P\binom{\lambda\,0}{0\,\mu}P^{-1})\iff((\exists\lambda\in\mathbf{R})(A=\binom{\lambda\,0}{0\,\lambda}))\vee(\exists a,b\in\mathbf{R})(a\neq b\wedge\det(A-aI)=0\wedge\det(A-bI)=0)))$.

K.1. $\mathbf{R}^{1,1}$ jest to $\mathbf{R}^2$ wyposażone w następujący fałszywy iloczyn skalarny: $(\binom{x_1}{x_2},\binom{y_1}{y_2})=x_1y_1-x_2y_2$. Dla $X,Y\in\mathbf{R}^{1,1}$ definiujemy interwał pary X,Y jako $I(X,Y)=(X-Y,X-Y)$. Izometrią $\mathbf{R}^{1,1}$ nazywamy przekształcenie $F:\mathbf{R}^{1,1}\to\mathbf{R}^{1,1}$ spełniające $(\forall X,Y\in\mathbf{R}^{1,1})(I(F(X),F(Y))=I(X,Y))$.
   a) Pokaż, że każda izometria $\mathbf{R}^{1,1}$ jest złożeniem translacji i izometrii $\mathbf{R}^{1,1}$ zachowującej 0.
   b) Pokaż, że jeśli izometria $\mathbf{R}^{1,1}$ zachowuje 0, to jest liniowa.
   c) Opisz macierze wszystkich liniowych izometrii $\mathbf{R}^{1,1}$.
   d) Wyjaśnij paradoks bliźniąt.

Wsk: $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.