Algebra liniowa 1B, Lista 6

Ćwiczenia (Kartkówka 25 listopada)

1. Uzupełnij (na wszystkie możliwe sposoby) do macierzy izometrii: $\begin{pmatrix} 0,5 & * \\ * & * \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ * & * \end{pmatrix}$; Które z otrzymanych macierzy zachowują orientację?
2. Sprawdź bezpośrednim rachunkiem wzór $\langle AX, Y\rangle = \langle X, A^\top Y\rangle$. Wywnioskuj $\langle A^\top X, Y\rangle = \langle X, AY\rangle$.
3. Rozpoznaj następujące krzywe stopnia 2 sprowadzając ich równania do możliwie prostej postaci: (a) $2x^2+3y^2-4x+18y+28=0$, (b) $2x^2+3y^2-4x+18y+29=0$, (c) $2x^2+3y^2-4x+18y+30=0$, (d) $x^2-5y^2-4x-50y-123=0$, (e) $x^2-5y^2-4x-50y-121=0$, (f) $-y^2-7x+8y-21=0$, (g) $-y^2+8y-21=0$, (h) $-y^2+8y-16=0$, (i) $-y^2+8y-11=0$.
4. Podaj przykład równania stopnia 2 opisującego (a) parę prostych przecinających się w punkcie $\binom{1}{2}$; (b) parę prostych równoległych do wektora $\binom{1}{2}$; (c) okrąg o promieniu 7 przechodzący przez punkt $\binom{3}{4}$; (d) punkt $\binom{0}{1}$; (e) $\emptyset$; (f) hiperbolę przechodzącą przez punkt $\binom{0}{3}$, taką że kąt między jej asymptotami wynosi $\pi/3$.
5. Wzory $x' = x+y$, $y' = x-2y$ zadają liniowy, ale nieprostokątny układ współrzędnych na płaszczyźnie.
   a) wskaż dwa punkty $P_1 = \binom{x_1'}{y_1'}$, $P_2 = \binom{x_2'}{y_2'}$, takie że $d(P_1,P_2) \neq \sqrt{(x_1'-x_2')^2+(y_1'-y_2')^2}$.
   b) wskaż dwa wektory $U_1 = \binom{x_1'}{y_1'}$, $U_2 = \binom{x_2'}{y_2'}$, takie że $\langle U_1, U_2\rangle \neq x_1'y_1' + x_2'y_2'$.
6. Znajdź wielomian charakterystyczny macierzy $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Co potrafisz powiedzieć o jego pierwiastkach?
7. Podaj przykład równania krzywej stopnia 2, takiego że $ac-b^2=0$, i (a) wyrazy liniowe można usunąć przez odpowiednią translacje; (b) wyrazów liniowych nie da się usunąć żadną translacją.
8. Sprawdź, że $(AB)^\top = B^\top A^\top$, $(A^\top)^\top = A$, $(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1}$, $\mathrm{tr}(A^\top) = \mathrm{tr}(A)$, $\det(A^\top) = \det(A)$.

Zadania (kartkówka 2 grudnia)

1. Napisz macierz izometrii F, takiej że kąt między $F\binom{2}{3}$ a $\binom{7}{-2}$ jest większy od $22°$, ale mniejszy od $23°$.
2. Znajdź wszystkie izometrie liniowe (tzn. ich macierze) takie że obrazem prostej $3x-2y=0$ jest prosta $2x+5y=0$.
3. Dana jest krzywa $x^2+xy+y^2-1=0$. Napisz jej równanie w układzie współrzędnych powstałym ze standardowego przez obrót o kąt $\pi/4$ (wszystko jedno w którą stronę) i wtedy rozstrzygnij co to za krzywa.
4. Znajdź obraz krzywej $-3x^2+8xy+3y^2=1$ przez obrót R o macierzy $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, gdzie $a^2+b^2=1$.(Wsk. obraz przez R = przeciwobraz przez R^{-1}; zastosuj metodę znajdowania przeciwobrazu którą stosowaliśmy do prostych.) Dobierz parametry a, b tak, aby w równaniu obróconej krzywej nie było wyrazu mieszanego. Co to za krzywa?
5. Znajdź wszystkie przekształcenia liniowe A, takie że obrazem hiperboli $xy=1$ przez A jest ta sama hiperbola. Które spośród znalezionych przekształceń są izometriami?
6. Macierz S nazywamy symetryczną, jeśli $S = S^\top$. Niech X będzie wektorem własnym macierzy symetrycznej S, zaś Y niech będzie niezerowym wektorem prostopadłym do X. Uzasadnij, że $S(Y) \perp X$ i wywnioskuj, że Y jest wektorem własnym S. (Wsk. ćw 2)
7. Wykaż, że jeśli funkcja $\Phi : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ jest dwuliniowa, to funkcja $\mathbf{R}^2 \ni X \mapsto \Phi(X,X) \in \mathbf{R}$ jest formą kwadratową, tzn. jest postaci $\binom{x}{y} \mapsto ax^2+2bxy+cy^2$ dla pewnych $a,b,c \in \mathbf{R}$.
8. Uzasadnij, że jeśli A jest izometrią $\mathbf{R}^2$, zaś C pewną krzywą zadaną równaniem, to (a) równanie krzywej $A^{-1}(C)$ jest takie samo jak równanie C w układzie współrzędnych przeniesionym przez A (tj. w układzie, którego osiami są obrazy osi OX i OY przez A); (b) równanie krzywej $A(C)$ jest takie samo jak równanie C w układzie współrzędnych przeniesionym przez A^{-1}.
9. (Rafała Walczaka zadanie z geografii) Udowodnij, że jeśli A jest przekształceniem liniowym, to istnieją dwa niezerowe wektory U, W prostopadłe do siebie, takie że $A(U)$ i $A(W)$ są prostopadłe.
10. Przeprowadź liniową klasyfikację form kwadratowych, tj. udowodnij, że każda forma kwadratowa ma, w odpowiednio dobranym liniowym układzie współrzędnych (niekoniecznie prostokątnym!), jedną z następujących postaci: x^2+y^2, x^2-y^2, $-x^2-y^2$, x^2, $-x^2$, 0. (Wsk. Pozbądź się wyrazu mieszanego w $ax^2+2bxy+cy^2$ metodą uzupełniania do kwadratu. Osobno potraktuj formę xy.)

K.1. Udowodnij, ze jeśli forma kwadratowa ma w pewnym liniowym układzie współrzędnych jedną z postaci z poprzedniego zadania, to w żadnym innym liniowym układzie współrzędnych nie ma żadnej innej z tych postaci. Jak w prosty sposób rozpoznać postać odpowiadającą danej formie patrząc na jej współczynniki a, b, c?

K.2. Pan Gal wziął dwie macierze A i B, pomnożył A przez B, a następnie B przez A, po czym wyniki odjął. Wyszła mu macierz identycznościowa. Pan Gal był tym bardzo wzburzony. Dlaczego?

K.3. W odróżnieniu od dosyć nudnej teorii form kwadratowych o współczynnikach rzeczywistych, teoria form kwadratowych o współczynnikach całkowitych jest absolutnie fascynująca. Naciągnij Swego Ćwiczeniowca na możliwie długą o niej opowieść. Używaj słów takich jak: elementy całkowite kwadratowego rozszerzenia $\mathbf{Q}$, grupa klas ideałów, genus, itp.