Algebra liniowa 1B, Lista 7

Ćwiczenia (Kartkówka 2 grudnia)

1. Znajdź kanoniczne równania poniższych krzywych diagonalizując stosowną macierz symetryczną (lub inaczej). Następnie znajdź wektory własne tej macierzy i prostokątny układ współrzędnych w którym równanie staje się kanoniczne. Rozpoznaj i naszkicuj krzywą (na tle oryginalnych współrzędnych).
(a) $x^2+3xy+y^2+1=0$, (b) $4xy-2y^2=2$, (c) $4x^2+2\sqrt{2}xy+3y^2=1$, (d) $x^2-2xy+y^2=1$,
(e) $x^2-3y^2=0$, (f) $xy+y^2=0$, (g) $x^2+2xy+y^2=0$, (h) $x^2+xy+y^2=0$.
2. Uzasadnij, że jeśli A jest macierzą, to funkcja $X \mapsto X^\top AX$ jest formą kwadratową. Czy A jest macierzą tej formy?
3. Uzasadnij, że jeżeli Q jest formą kwadratową, to istnieje *jedyna* macierz symetryczna A, taka że $Q(X) = X^\top AX$.
4. Niech $A = \left(\begin{smallmatrix}1&2\\2&5\end{smallmatrix}\right)$ będzie macierzą przekształcenia liniowego F, jak również macierzą formy kwadratowej Q. Wprowadźmy nowy liniowy układ współrzędnych wzorami $x' = 2x+y$, $y' = x+2y$. Znajdź macierz F i macierz Q w tym nowym układzie współrzędnych.
5. Podaj przykład macierzy symetrycznej M o wyrazach dodatnich oraz wektora U, takich że $\langle MU, U\rangle < 0$.
6. Oblicz, o ile to możliwe, iloczyny macierzy:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}^\top; \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}^\top\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\end{pmatrix}.$$

7. Niech M, N będą dwoma punktami, zaś $L > d(M,N)$. Uzasadnij, że $\{P \in \mathbf{R}^2 : d(P,M)+d(P,N) = L\}$ jest elipsą. Wsk. wybierz układ współrzędnych, w którym M, N leżą na osi OX, oba w tej samej odległości od O.

Zadania (kolokwium 9 grudnia)

1. Sprowadź do postaci kanonicznej (wraz z wyrażeniem nowych współrzędnych przez stare i starych przez nowe): (a) $x^2-2xy+y^2+x+y=0$; (b) $34x^2-24xy+41y^2-20x-140y+125=0$.
2. Stwierdź, jakim podzbiorem płaszczyzny jest zbiór rozwiązań równania $\lambda x^2+\mu y^2=0$, w zależności od wartości liczb λ, μ.
3. Rozważmy równanie $ax^2+2bxy+cy^2=h$. Ma ono postać kanoniczną $\lambda(x')^2+\mu(y')^2=1$ lub $\lambda(x')^2+\mu(y')^2=0$ w pewnym prostokątnym układzie współrzędnych. Rozpatrując znaki liczb $ac-b^2$, $a+c$, h można sporo powiedzieć o znakach liczb λ, μ (zrób tabelkę). Użyj tej metody by stwierdzić, czy następujące równania reprezentują elipsę, hiperbolę, prostą, parę prostych, punkt czy zbiór pusty.
(a) $x^2-3xy+y^2=1$, (b) $25x^2+10xy+y^2=2$, (c) $x^2-2xy-2y^2=0$, (d) $x^2+4xy+y^2=-7$,
(e) $x^2-6xy+9y^2=0$, (f) $3x^2+7xy-y^2=-2$, (g) $7x^2-2xy+2y^2=0$, (h) $x^2+xy=-3$,
(i) $2x^2+xy-2y^2=1$.
4. Znajdź oś symetrii obrazu paraboli $y=\sqrt{2}x^2$ przez przekształcenie o macierzy $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
5. Uzasadnij, że jeśli $F : \mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ jest dwuliniowa, to istnieje macierz M, taka że $F(X,Y) = X^\top MY$.
6. Udowodnij, że funkcja $Q : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ jest formą kwadratową wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione następujące dwa warunki:
   a) $\forall t \in \mathbf{R}, \forall X \in \mathbf{R}^2, Q(tX) = t^2Q(X)$;
   b) funkcja $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2 \ni (X,Y) \mapsto Q(X+Y)-Q(X)-Q(Y)$ jest dwuliniowa.
7. Załóżmy, że wartości własne macierzy symetrycznej M są dodatnie.
   a) Uzasadnij, że dla każdego niezerowego wektora X mamy $\langle MX, X\rangle > 0$.
   b) Udowodnij, że jeśli P jest macierzą odwracalną to wartości własne macierzy $P^\top MP$ są dodatnie.
8. Udowodnij, że obraz elipsy przez odwracalne przekształcenie liniowe jest elipsą. W razie kłopotów ogranicz się do przypadku, gdy środek symetrii elipsy leży w początu układu współrzędnych; wtedy można użyć poprzedniego zadania.
9. (Zadanie J.Jabłeckiego) Niech F będzie przekształceniem liniowym płaszczyzny, spełniającym warunek $(\forall X \in \mathbf{R}^2)(\exists n \in \mathbf{N})(F^n(X) = X)$. Udowodnij, że $(\exists n \in \mathbf{N})(\forall X \in \mathbf{R}^2)(F^n(X) = X)$. (Uwaga: $0 \notin \mathbf{N}$.)
10. Pokaż, że jeśli $\det F = 1$ zaś $X \in \mathbf{R}^2$, to istnieje krzywa C stopnia 2, taka że $\{F^n(X) \mid n \in \mathbf{N}\} \subseteq C$. (Uwaga: w razie kłopotów ogranicz się do przypadku, gdy F jest diagonalizowalne).