Algebra liniowa 1B, Lista 9

Ogłoszenia: Od przyszłego tygodnia, tj od 15.XII, kartkówki będą się odbywać w poniedziałki w sali HS, $12^{15} - 12^{30}$.

Ćwiczenia (kartkówka 15 grudnia)

1. Uzasadnij, że iloczyn wektorowy jest dwuliniowy i antysymetryczny.
2. Sprawdź bezpośrednim rachunkiem:
   (a) $\langle A\times B, C\rangle = \langle B\times C, A\rangle$; (b) $(A\times B)\perp A$, $(A\times B)\perp B$; (d) $A\times(B\times C)+B\times(C\times A)+C\times(A\times B)=0$.
3. Które z wyrażeń opisują wektor, które liczbę, a które są bez sensu (A, B, C to wektory, $\lambda\in\mathbf{R}$): (a) $\langle C\times(\lambda B), A\rangle$; (b) $\langle C, (\lambda B)\rangle\times A$; (c) $A\times(\langle C, B\rangle B)$; (d) $\lambda\langle A, B\rangle$; (e) $\lambda(A\times B)$; (f) $\langle A, B\rangle + A\times B$; (g) $\langle A, B\rangle(A\times B)$;
4. Uprość wyrażenia: (a) $\langle A, (A\times C)\rangle$; (b) $\langle A\times(B+A\times C), A\rangle$; (c) $\langle A + A\times B, A+B\rangle$.
5. Znajdź cosinus kąta między płaszczyznami $2x+7y-z=5$, $-x+y+3z=7$.
6. Zamień równanie płaszczyzny/prostej na parametryczne/nieparametryczne:
   (a) $X=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}$; (b) $x+2y+3z=4$; (c) $X=\begin{pmatrix}1\\0\\7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}$; (d) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+5}{-1}$.
7. Znajdź pola równoległoboków rozpiętych przez pary wektorów
   (a) $(1,-2,4)^\top, (-1,2,3)^\top$; (b) $(-1,0,2)^\top, (0,1,3)^\top$.
8. Niech $P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}^\top$, niech Π będzie płaszczyzną o równaniu $4x+y-z=2$, zaś ℓ niech będzie prostą $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{7}=\frac{z-(-2)}{3}$. Napisz nieparametryczne równanie
   (a) płaszczyzny przechodzącej przez P i równoległej do Π;
   (b) płaszczyzny przechodzącej przez P i zawierającej ℓ;
   (c) prostej przechodzącej przez P i prostopadłej do Π;
   (d) prostej przechodzącej przez P i równoległej do ℓ.
   (e) prostej przechodzącej przez P, równoległej do Π i prostopadłej do ℓ;
   (f) płaszczyzny Π' zawierającej ℓ i takiej, że kąt między Π a Π' jest równy kątowi między Π a ℓ.
9. Wyprowadź wzór na $\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^n$. (Wsk. policz dla $n=1,2,3$; zgadnij wzór ogólny; udowodnij go indukcyjnie.)
10. Uzasadnij, że jeśli $A+B+C=0$, to $A\times B = B\times C = C\times A$.

Zadania (kartkówka 22 grudnia)

1. (Kontynuacja 10/8) Pokaż, że jeśli $P=(U,\overline{U})$ (macierz 2×2 o kolumnach $U,\overline{U}$), to $M=P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \overline{\lambda}\end{pmatrix}P^{-1}$. Niech $U=X+iY$, $X,Y\in\mathbf{R}^2$. Przyjmij $Q=(X,Y)$ i wylicz, że $M=Q\begin{pmatrix}r\cos\phi & -r\sin\phi\\ r\sin\phi & r\cos\phi\end{pmatrix}Q^{-1}$, gdzie $\lambda=r(\cos\phi+i\sin\phi)$. Wylicz wszystkie twory o jakich mowa w tym zadaniu dla macierzy $M=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.
2. Doprowadź zadanie 8/4 do następującej konkluzji: Niech $P=(U,W)$; wtedy $m(F)=P\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}P^{-1}$. Przelicz przykład $m(F)=M=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. (Wsk. U to wektor własny M; weź V liniowo niezależny od U, oraz $W=\alpha V$, $\alpha\in\mathbf{R}$. Dobierz odpowiednie α).
3. Następujące macierze zdiagonalizuj (w razie potrzeby nad $\mathbf{C}$) lub sprowadź do postaci Jordana:
$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$
4. Znajdź możliwie dużo $X\in M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ spełniających równanie $X^2=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}$.
5. Niech $M\in M_{2\times 2}(\mathbf{C})$. Uzasadnij, że jeśli $M^{100}=0$, to $M^2=0$.
6. Znajdź cosinus kąta między płaszczyzną $y-5z-1=0$ a prostą $3x+4y=0$, $z=0$.
7. Napisz równania parametryczne i nieparametryczne prostej będącej przekrojem płaszczyzn $x+y+z=7$, $x+2y-z=3$.
8. Znajdź równanie nieparametryczne płaszczyzny zawierającej prostą $\frac{x-1}{3}=\frac{-1-2y}{4}=\frac{3z+9}{-6}$ i prostopadłej do płaszczyzny $-x+4y-2z=100$.
9. Znajdź równanie płaszczyzny zawierającej proste $X=(1,1,3)^\top+t(1,-2,1)^\top$, $\frac{1-x}{-2}=\frac{2y+2}{-8}=\frac{z+3}{2}$.
10. Znajdź równanie płaszczyzny przechodzącej przez $(2,-1,3)^\top$, $(3,1,2)^\top$ i równoległej do wektora $(-3,1,4)^\top$.