Algebra liniowa B2. Lista1

$\vec{0}$. Niektóre zera na tej liście oznaczają wektor zerowy. Znajdź je wszystkie i dorysuj nad nimi strzałki.

1. Używając jedynie aksjomatów przestrzeni liniowej (i arytmetyki liczb) uzasadnij precyzyjnie, że $5(u+w)+2w = 7(u+w)+(-2)u$.
2. Uzasadnij, że jeśli K jest ciałem, zaś $a \in K - \{0\}$, to istnieje jedyne $b \in K$ (zwane elementem odwrotnym do a i oznaczane a^{-1} lub $\frac{1}{a}$), takie że $ab = ba = 1$. Def: $\frac{x}{y} = x\frac{1}{y}$.
3. Wykaż, że w dowolnym ciele zachodzą tożsamości: $(-1)x = -x$, $-(-x) = x$, $(-1)(-1) = 1$, $(-x)y = -xy$, $(x-y)z = xz - yz$, $\frac{x-y}{z} = \frac{x}{z} - \frac{y}{z}$ (dla $z \neq 0$), $\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{xy}$ (dla $x, y \neq 0$), $\frac{z}{x} + \frac{t}{y} = \frac{zy+tx}{xy}$ (dla $x, y \neq 0$), $x-(y-z) = (x-y)-z$.
4. Udowodnij, że w dowolnej przestrzeni liniowej V zachodzi (a, b to skalary, v, w – wektory): $-(v-w) = (-v)+w$; $av = 0 \iff (a = 0 \lor v = 0)$; $(a-b)v = av - bv$; $av + bw = bv + aw \iff (a = b \lor v = w)$; $a(-v) = (-a)v = -av$.
5. Sprawdź starannie, że przestrzeń $F(A, \mathbf{R})$ wszystkich funkcji z A w $\mathbf{R}$ jest (z działaniami zdefiniowanymi na wykładzie) przestrzenią liniową.
6. Znajdź $\mathrm{Lin}((1,2,3)^\top, (4,5,6)^\top)$ w $\mathbf{R}^3$ (opisz ten zbiór równaniem).
7. Uzasadnij, że jeśli w układzie $v_1, \ldots, v_n$ pewne dwa wektory są równe, to układ ten jest lz. Uzasadnij, że jeśli w układzie $v_1, \ldots, v_n$ pewien wektor jest równy 0, to układ ten jest lz.
8. Które z następujących zbiorów są podprzestrzeniami:

a) $C(\mathbf{R})$: $\{f \in C(\mathbf{R}) : f(7) = 0\}$, $\{f \in C(\mathbf{R}) : f(12) \geq f(-12)\}$, $\{f \in C(\mathbf{R}) : (\forall x \in \mathbf{R})(f'(x) \geq 0)\}$, $\{f \in C^1(\mathbf{R}) : (\forall x \in \mathbf{R})(3f'(x) + x^2 f(x) = 0)\}$;

b) przestrzeni $c = \{(a_n)_{n=0}^{\infty} : a_n \in \mathbf{R}\}$ wszystkich ciągów o wyrazach rzeczywistych: $\{(a_n) : (\forall n \geq 0)(a_{n+3} = a_{n+1} - 3a_n)\}$, $\{(a_n) : a_{17} + a_{100}^3 = 0\}$, $\{(a_n) : a_{17} = a_{100}^3 = 0\}$, $\{(a_n) : a_5 + a_7 + a_{15} = 0\}$;

c) $\mathbf{R}^3$ – podzbiory określone przez równania: $z^2 = x^2 + 2y^2$, $x + y + 2z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $2x + 3y + z = 0$;

d) przestrzeni wielomianów $\mathbf{R}[X]$: wielomiany stopnia 7, $\{P \in \mathbf{R}[X] : P'(2) = 0\}$, $\{P \in \mathbf{R}[X] : P''(-1) + P(4) = 0\}$, $\{P \in \mathbf{R}[X] : P''(2) + P(0)^2 = 0\}$,

9. Odwołując się do wiedzy z I semestru opisz wszystkie podprzestrzenie $\mathbf{R}^3$.
10. Uzasadnij lub obal (A, B to dowolne podzbiory dowolnej przestrzeni liniowej): $\mathrm{Lin}(A \cup B) = \mathrm{Lin}(A) + \mathrm{Lin}(B)$, $\mathrm{Lin}(A \cap B) = \mathrm{Lin}(A) \cap \mathrm{Lin}(B)$, $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{Lin}(A) \subseteq \mathrm{Lin}(B)$, $\mathrm{Lin}(\mathrm{Lin}(A)) = \mathrm{Lin}(A)$.
11. Uzasadnij, że jeśli $v_1, \ldots, v_n$ są lnz, a v_{n+1} nie jest ich kombinacją liniową, to $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ są lnz. Czy jest też odwrotnie?
12. Wskaż możliwie duży liniowo niezależny podzbiór przestrzeni $V = \{P \in \mathbf{R}[X] : P'(-1) = 0\}$.
13. W zbiorze $A = \{(0,0,0,0)^\top, (1,0,1,0)^\top, (1,2,1,3)^\top, (2,2,2,3)^\top, (0,0,0,1)^\top\}$ wskaż podzbiór, który jest bazą $\mathrm{Lin}(A)$ (rzecz dzieje się w $\mathbf{R}^4$).
14. Znajdź bazę podprzestrzeni $\mathbf{R}^5$ zadanej układem równań: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$. (Uzasadnij, że jest to naprawdę baza.)
15. W każdej przestrzeni liniowej, której baza została wskazana na wykładzie, wskaż inną bazę (o ile się da). Czy istnieje przestrzeń liniowa (nad $\mathbf{R}$), która ma jedyną bazę?
16. Uzasadnij, że jeśli 3-elementowy zbiór $\{u, v, w\}$ jest bazą V, to również $\{u+v, u+2v+w, w\}$ jest bazą V.
17. Podaj przykład trójki $V_1, V_2 < W$, takiej że ani $V_1 \cup V_2$, ani $V_1 \backslash V_2$ nie jest podprzestrzenią W.
18. Uzasadnij, że wielomian o współczynnikach rzeczywistych, który ma przynajmniej jeden niezerowy współczynnik, nie zadaje funkcji zerowej.
19. Dla $V = \mathbf{R}^2$ stwierdź, jak duży (jakiej mocy) jest zbiór $\mathcal{X}$, o którym mowa w dowodzie istnienia bazy. Jak długi może być łańcuch w $(\mathcal{X}, \subseteq)$ w tym przypadku? Uzasadnij, że $\mathbf{R}^2$ ma bazę, w możliwie łatwy sposób.
20. Niech $V = \mathbf{R}_3[X]$, $A = \{1 + X - X^2 - X^3, 1 + 2X^2 - 3X^3, X - 2X^2 + X^3\}$. Spróbuj możliwie prosto opisać $\mathrm{Lin}(A)$: podaj warunek, pozwalający łatwo stwierdzić dla danych a, b, c, d, czy wielomian $aX^3 + bX^2 + cX + d$ należy do $\mathrm{Lin}(A)$. Przetestuj Swój warunek na wielomianach $5X^3 + 4X - 8$, $X^2 + 2X - 3$. (To zadanie może być jeszcze za trudne.)
21. Udowodnij, że B jest bazą przestrzeni liniowej V wtedy i tylko wtedy, gdy jest minimalnym podzbiorem V liniowo generującym V. [Bardziej symbolicznie, udowodnij że: B jest bazą V $\iff$ $(B \subseteq V) \land \big((\forall C \subseteq V)((\mathrm{Lin}(C) = V \land C \subseteq B) \Rightarrow (C = B))\big)$.]

Zadania 2 i 3 są w zasadzie z algebry (abstrakcyjnej). Można je sobie odłożyć na przyszły rok.

Algebra liniowa 2B

Wykładowca: Jan Dymara
Kartkówka: Środa, 10^{15}–10^{30}, sala EM.
Wykład: Środa, 10^{30}–11^{00}, sala EM; 11^{15}–13^{00}, sala B.
Ćwiczenia: Poniedziałek, 8^{15}–10^{00}, sale A i B.
Konwersatorium: Poniedziałek, 10^{15}–11^{00}, sala B.

Celem wykładu jest przedstawienie podstawowych pojęć i metod algebry liniowej w przestrzeniach liniowych (głównie skończonego wymiaru, nad $\mathbf{R}$ i $\mathbf{C}$).

1. Przestrzenie liniowe (podprzestrzenie liniowe, liniowa niezależność, wymiar, baza, suma prosta, przestrzeń dualna, przestrzeń ilorazowa).
2. Przekształcenia liniowe i ich macierze (jądro i obraz, zależność macierzy od bazy, wyznacznik, macierz odwrotna, wartości i wektory własne, diagonalizacja, tw. Jordana)
3. Układy równań liniowych (ogólna teoria, wzory Cramera, tw. Kroneckera–Capellego, Gaussa metoda eliminacji).
4. Przestrzenie z iloczynem skalarnym, izometrie.
5. Formy dwuliniowe i kwadratowe, ich macierze, diagonalizacja.

Pomocna literatura:
A.Kostrykin, Yu.Manin, Algebra liniowa z geometrią.
skrypt L. Newelskiego, Algebra liniowa II.
Zbiór zadań z algebry, pod red. A. Kostrykina.
A.Mostowski, M.Stark, Algebra liniowa.
A.Mostowski, M.Stark, Elementy algebry wyższej.
A.Białynicki-Birula, Algebra liniowa z geometrią.
A.Białynicki-Birula, Algebra.
B.Gleichgewicht, Algebra.
G.Banaszak, W.Gajda, Elementy algebry liniowej.
G.Birkhoff, S.MacLane, Przegląd algebry współczesnej.
J.Komorowski, Od liczb zespolonych do tensorów, spinorów, algebr Liego i kwadryk.
skrypt W. Więsława, Algebra geometryczna.
T.Banchoff, J.Wermer, Linear Algebra Through Geometry.
P.Halmos, Finite dimensional vector spaces.
W bibliotece w katalogu rzeczowym w dziale 15 (algebra liniowa) można znaleźć wiele innych książek.

Zasady zaliczania wykładu i ćwiczeń.

Co tydzień (z wyjątkiem: 25.II, 7.IV, 26.V, 9VI) na pierwszej godzinie wykładu będzie się odbywać 15 min. kartkówka, na której studenci będą rozwiązywać zadania dotyczące meteriału z poprzedniego wykładu. Na każdej kartkówce będzie można otrzymać 3 punkty. Dwukrotnie: 5 kwietnia i 24 maja, odbędą się kolokwia (na każdym będzie można uzyskać do 30 punktów). Będzie też można uzyskać punkty za aktywność na ćwiczeniach (ćwiczeniowcy będą je przyznawać wedle swego uznania). Osoby, które zdobędą co najmniej 40% możliwych do uzyskania punktów, zaliczą ćwiczenia.
Nieobecność można usprawiedliwić okazując wpisane do studenckiej książeczki zdrowia zwolnienie lekarskie pani M.Skubiszewskiej, pok. 315, w ciągu 7 dni od zakończenia terminu zwolnienia. W przypadkach losowych decyzję o usprawiedliwieniu podejmuje wykładowca. W przypadku usprawiedliwionej nieobecności na kolokwium należy skontaktować się z wykładowcą w celu ustalenia sposobu uzyskania zaliczenia.
Egzamin pisemny odbędzie się w sesji. Warunkiem dopuszczenia do egzaminu jest zaliczenie ćwiczeń.