Algebra liniowa B2. Lista 10

W przyszłym tygodniu konsultacji we wtorek nie będzie
Na tej liście wszystkie przestrzenie mają skończony wymiar, $F : V \to V$ jest przekształceniem liniowym.

1. Znajdź postacie Jordana i bazy jordanowskie dla macierzy z zadania 11 z listy 9.
2. Znajdź postacie Jordana (najlepiej nie wyznaczając baz jordanowskich) dla macierzy:
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Znajdź postać Jordana przekształcenia $\mathbf{R}_n[X] \ni P \mapsto P' \in \mathbf{R}_n[X]$.
4. Ile jest możliwych postaci Jordana 6×6 z trzema wartościami własnymi?
5. Podaj przykład macierzy $A \in M_{3\times3}(\mathbf{R})$, której żaden wyraz nie jest równy 0, ale $A^3 = 0$.
6. Podaj przykład macierzy 4×4 której jedynymi wektorami własnymi są skalarne krotności następujących wektorów: $(1, 0, 2, 1)^\top$, $(-1, 1, 0, 1)^\top$. Ile wartości własnych może mieć taka macierz? (zrób to zadanie nad $\mathbf{R}$, jak i nad $\mathbf{C}$. Czy jest jakaś różnica?)
7. Czy istnieje $F : V \to V$, takie że $\dim(\sum_{\lambda\in\sigma(F)} V^\lambda) = 2$, jeśli (a) $V = \mathbf{R}^4$? (b) $V = \mathbf{R}^5$?
8. Załóżmy, że F da się sprowadzić do postaci Jordana. Czy każdy niezerowy wektor z V^λ jest elementem pewnej bazy jordanowskiej F?
9. Wyprowadź wzór na n-tą potęgę klatki Jordana.
10. Rozwiąż równania macierzowe: (a) $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; (b) $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.
11. Oblicz $\exp \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
12. Uzasadnij, że jeśli $V = V^\lambda(F)$, zaś $\dim V_\lambda(F) = 1$, to postacią Jordana F jest pojedyncza klatka Jordana. Używając tego kryterium podaj kilka możliwie skomplikowanych macierzy, których postać Jordana jest pojedynczą klatka Jordana.
13. Uzasadnij, że w postaci Jordana przekształcenia F jest $\dim(V_\lambda)$ klatek odpowiadających wartości własnej λ.
14. Niech $F^n = 0$. Pokaż, że rozmiar największej klatki w postaci Jordana F jest równy $\min\{k : F^k = 0\}$.
15. Uzasadnij, że jeśli $A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ spełnia $A^{10000} = 0$, to również $A^n = 0$.
16. Z twierdzenia Jordana wywnioskuj, że dla $A \in M_{n\times n}(\mathbf{C})$ zachodzi $\chi_A(A) = 0$ (por. 9/12).
17. Uzasadnij, że jeśli $\chi_F(x) = (-x)^n$, to $F^n = 0$.
18. Wykaż, że jeśli $e_1 + W, \dots, e_k + W$ są lnz w V/W, to $e_1, \dots, e_k$ są lnz w V.
19. Uzasadnij, że jęśli $F^{k+1}(v) \in \mathrm{Lin}(v, F(v), \dots, F^k(v))$, to $\mathrm{Lin}(v, F(v), \dots, F^k(v))$ jest F-niezmiennicza.
20. Wykaż, że dla $A \in M_{n\times n}(\mathbf{C})$ zachodzi wzór $\det \exp A = e^{\operatorname{tr} A}$.