Algebra liniowa B2. Lista 11

W przyszłym tygodniu konsultacji nie będzie.

Q jest zwykle formą kwadratową na skończenie wymiarowej przestrzeni V. Wektor $v \in V$ nazywamy *izotropowym,* jeśli $Q(v) = 0$.

1. Podaj przykład formy kwadratowej Q na pewnej przestrzeni V oraz dwóch wektorów izotropowych $v, w \in V$, takich że $Q(v + w) \neq 0$.
2. Uzasadnij, że jeśli Q jest formą kwadratową, to $Q(tv) = t^2 Q(v)$. (v to wektor, t to skalar.) Czy każda funkcja spełniająca tę tożsamość (dla wszelkich v, t) jest formą kwadratową?
3. Czy (a) suma; (b) różnica; (c) iloczyn form kwadratowych (określonych na tej samej przestrzeni) jest formą kwadratową?
4. Uzasadnij, że symetryczne macierze 2×2 o wyrazach rzeczywistych tworzą przestrzeń liniową. Jaki jest jej wymiar? Zidentyfikuj i naszkicuj podzbiór tej przestrzeni składający się z macierzy dodatnio określonych.
5. Uzasadnij, że obcięcie formy kwadratowej do podprzestrzeni jest formą kwadratową.
6. Udowodnij lub obal: (a) Jeśli macierz 3×3 ma wszystkie wyrazy dodatnie, to jest dodatnio określona; (b) suma macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określona; (c) iloczyn macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określony.
7. Metodą Lagrange'a sprowadź do postaci diagonalnej formy $x_1x_2 + x_2^2$, $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3^2$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$, $\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} x_ix_j$.
8. Wyznacz symetryczną formę dwuliniową związaną z formą kwadratową $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.
9. Dla jakich wartości λ następujące formy są dodatnio określone: $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$; $2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3$; $x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$; $x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$;
10. Znajdź sygnaturę formy: $x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3$; $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$; $2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$; $2x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$;
11. Które z poniższych funkcji są formami dwuliniowymi na odpowiednich przestrzeniach liniowych? Które są ponadto symetryczne? Napisz ich macierze w wybranych przez siebie bazach. Zbadaj dodatnią określoność (w przypadkach, gdy ma ona sens). (a) $\Phi(x, y) = x^\top y$ ($\Phi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$); $\Phi : M_{n\times n}(\mathbf{R}) \times M_{n\times n}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$: (b) $\Phi(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$, (c) $\Phi(A, B) = \det(AB)$, (d) $\Phi(A, B) = \mathrm{tr}(AB^\top)$, (e) $\Phi(A, B) = \mathrm{tr}(A + B)$; Φ : $\mathbf{R}_n[X] \times \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}$: (f) $\Phi(P_1, P_2) = \int_0^1 P_1(x)P_2(x)dx$, (g) $\Phi(P_1, P_2) = P_1(2)P_2(1)$.
12. Podaj kryteria (a) ujemnej określoności; (b) dodatniej półokreśloności; (c) ujemnej półokreśloności macierzy analogiczne do kryterium Sylvestera.
13. Uzasadnij, że każda forma kwadratowa na przestrzeni liniowej nad ciałem $\mathbf{C}$ ma w odpowiednio dobranym liniowym układzie współrzędnych postać $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2$ (dla pewnego k nie większego niż wymiar przestrzeni i zależącego od formy).
14. Uzasadnij, że forma kwadratowa jest dodatnio półokreślona [dodatnio określona] wtedy i tylko wtedy, gdy jej macierz da się zapisać w postaci $B^\top B$ dla pewnej macierzy B [, gdzie B jest kwadratową macierzą odwracalną]. (Wsk. diagonalizacja)
15. Załóżmy, że zbiór wektorów izotropowych jest podprzestrzenią. Wykaż, że wtedy (a) Q jest półokreślona; (b) jeśli $v, w \in V$, przy czym v jest wektorem izotropowym, to $Q(v, w) = 0$.
16. Niech Q będzie formą kwadratową na przestrzeni $R_n[X]$. Czy istnieje $W \in \mathbf{R}_n[X]$, taki że dla każdego $P \in \mathbf{R}_n[X]$ zachodzi $Q(P) = \int_0^1 P(x)^2 W(x)dx$?
17. Jaki jest maksymalny możliwy wymiar izotropowej podprzestrzeni (tzn. podprzestrzeni, której każdy wektor jest izotropowy) w przestrzeni liniowej wymiaru n z formą kwadratową sygnatury (p, q)?
18. Ze skończonym grafem (niezorientowanym, bez krawędzi wielokrotnych, bez pętli), wiążemy macierz (a_{ij}): numerujemy wierzchołki grafu i kładziemy $a_{ij} = -1$ jeśli i-ty i j-ty wierzchołek są połączone krawędzią, $a_{ij} = 0$ jeśli nie są, oraz $a_{ii} = 2$ dla każdego i. Znajdź wszystkie grafy dla których dostaje się dodatnio określoną macierz.