Algebra liniowa B2. Lista 12

W przyszłym tygodniu konsultacje będą. Wszystko dzieje się w $\mathbf{R}^n$ lub w skończenie wymiarowej przestrzeni euklidesowej V, chyba że treść zadania mówi inaczej.

1. Uzupełnij do bazy ortogonalnej: (a) $\{(1,-2,2,-3)^\top,(2,-3,2,4)^\top\}$; (b) $\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})^\top,(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^\top\}$.
2. Które z funkcji Φ z zadania 11 z listy 11 są iloczynami skalarnymi?
3. Znajdź ortogonalną bazę podprzestrzeni (a) $\mathrm{Lin}((1,2,2,-1)^\top,(1,1,-5,3)^\top,(3,2,8,-7)^\top)$; (b) $\mathrm{Lin}((2,1,3,-1)^\top,(7,4,3,-3)^\top,(1,1,-6,0)^\top,(5,7,7,8)^\top)$.
4. Wyznacz bazę $\mathrm{Lin}((1,0,2,1)^\top,(2,1,2,3)^\top,(0,1,-2,1)^\top)^\perp$.
5. Znajdź rzut prostopadły wektora $(5,2,-2,2)$ na $W=\mathrm{Lin}((2,1,1,-1)^\top,(1,1,3,0)^\top,(1,2,8,1)^\top)$ i na $W^\perp$.
6. Zadaj układem równań dopełnienie ortogonalne przestrzeni zadanej układem $\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3-3x_4=0\\ 3x_1-x_2+11x_3-13x_4=0\\ 4x_1+x_2+18x_3-23x_4=0\end{cases}$
7. Wyznacz odległość punktu $(3,3,-4,2)^\top$ od podprzestrzeni zadanej układem równań $x_1+2x_2+x_3-x_4=0$, $x_1+3x_2+x_3-3x_4=0$.
8. Napisz w bazie standardowej macierz rzutu prostopadłego na podprzestrzeń zadaną równaniem $x_1-2x_2+x_3-3x_4=0$.
9. Rozważmy przestrzeń $\mathbf{R}_3[X]$ z iloczynem skalarnym $\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$.
   a) Zastosuj proces Grama–Schmidta do układu $(1,X,X^2)$.
   b) Znajdź odległość X^3 od podprzestrzeni $\mathbf{R}_2[X]$.
10. Udowodnij lub obal: (W,U,Z to dowolne podprzestrzenie, zaś A,B – dowolne podzbiory skończenie wymiarowej przestrzeni euklidesowej V)
    a) $(W+U)^\perp=W^\perp\cap U^\perp$;
    b) $A\subseteq(A^\perp)^\perp$;
    c) $(W\cup U)^\perp=W^\perp\cup U^\perp$;
    d) $[A=(A^\perp)^\perp]\Rightarrow A<V$;
    e) $(A\cap B)^\perp=A^\perp+B^\perp$.
11. Uzasadnij, że każdy ortogonalny układ niezerowych wektorów jest liniowo niezależny.
12. Uzasadnij, że każdy ortonormalny układ wektorów można uzupełnić do bazy ortonormalnej (zakładamy, że jesteśmy w skończenie wymiarowej przestrzeni euklidesowej).
13. Uzasadnij, że $P_W+P_{W^\perp}=Id$.
14. Niech $W,U<V$. Czy jest prawdą, że $P_W\circ P_U=P_{W\cap U}$?
15. Niech $W<V$, zaś B niech będzie bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej V. Udowodnij, że każdy wyraz macierzy $m_B^B(P_W)$ jest co do modułu nie większy niż 1.
16. Wykaż, że suma kwadratów długości rzutów wektorów dowolnej bazy ortonormalnej na k-wymiarową podprzestrzeń jest równa k.
17. Uzasadnij, że jeśli W,U są podprzestrzeniami przestrzeni euklidesowej V, zaś $x\in w+W$, $y\in u+U$ punktami, to $d(x,y)=\min\{d(a,b): a\in w+W, b\in u+U\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x-y$ jest prostopadłe do W i do U.
18. Niech W, U będą podprzestrzeniami pewnej skończenie wymiarowej przestrzeni euklidesowej V. Niech $Z=(W+U)^\perp$, $x\in w+W$, $y\in u+U$. Uzasadnij, że odległość zbiorów $w+W$, $u+U$ wynosi $|P_Z(x-y)|$. (Odległość zbiorów A, B to $\inf\{d(a,b) : a\in A, b\in B\}$; w razie kłopotów załóż, że w naszym przypadku to infimum jest realizowane przez pewną parę punktów.) Oblicz odległość zbioru rozwiązań układu $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+x_4=3\\ x_1+3x_2-x_3+2x_4=6\end{cases}$ od zbioru $(0,2,6,-5)^\top+\mathrm{Lin}((-7,1,1,1)^\top,(-10,1,2,3)^\top)$.
19. W przestrzeni $C[0,1]$ funkcji ciągłych na przedziale $[0,1]$ z iloczynem skalarnym $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)dx$ wyznacz dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni $\{f\in C[0,1]: f(0)=0\}$.