Algebra liniowa B2. Lista 13

Wszystko dzieje się w skończenie wymiarowej przestrzeni euklidesowej V, rzeczywistej lub zespolonej, chyba że treść zadania mówi inaczej.

1. Sprawdź, że podane na wykładzie dwie definicje iloczynu skalarnego na kompleksyfikacji rzeczywistej przestrzeni euklidesowej są zgodne.
2. Wyznacz postać kanoniczną i bazę ortonormalną w której jest ona przyjmowana dla ortogonalnych przekształceń $\mathbf{R}^n$ zadanych w bazie standardowej macierzami:
$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$;
3. Wyznacz ortonormalną bazę wektorów własnych i macierz w tej bazie przekształcenia unitarnego, zadanego w pewnej bazie ortonormalnej macierzą: $\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$; $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}$.
4. Uzupełnij układ $(1,-1,i,0)^\top, (-1,0,i,-i)^\top$ do ortogonalnej bazy $\mathbf{C}^4$.
5. Znajdź macierz unitarną M, taką że $M((1,-i,2,0)^\top) \perp (i,-1,1,2)^\top$.
6. Uzasadnij, że jeśli ortogonalne przekształcenie $\mathbf{R}^6$ ma rzeczywistą wartość własną, to ma też przynajmniej dwa liniowo niezależne wektory własne.
7. Czy jest przekształceniem ortogonalnym (a) przekształcenie odwrotne do ortogonalnego? (b) suma dwóch przekształceń ortogonalnych? (c) złożenie dwóch przekształceń ortogonalnych?
8. Uzasadnij, że jeśli Q jest niezerową symetryczną formą dwuliniową na zespolonej przestrzeni liniowej, to istnieje wektor v taki że $Q(v,v) = -1$. Pokaż na przykładzie, że stwierdzenie to nie jest prawdziwe jeśli Q zastąpić formą hermitowską.
9. Niech U będzie macierzą unitarną. Uzasadnij, że wszystkie wyrazy U^{100} są co do modułu nie większe niż 1.
10. Uzasadnij, że jeśli v i w są niezerowymi wektorami własnymi pewnego przekształcenia unitarnego odpowiadającymi różnym wartościom własnym, to $v \perp w$.
11. Załóżmy, że $(b_1, \dots, b_n)$ jest bazą ortonormalną V, zaś $F : V \to V$ przekształceniem liniowym, takim że $(F(b_1), \dots, F(b_n))$ też jest bazą ortonormalną V. Uzasadnij, że F jest ortogonalne/unitarne.
12. Uzasadnij, że jeśli $\|v\| = \|w\|$, to istnieje przekształcenie ortogonalne/unitarne F, takie że $F(v) = w$.
13. V – rzeczywista, $F : V \to V$ – przekształcenie liniowe, zaś $v + iw \in V^\lambda_{\mathbf{C}}(F_{\mathbf{C}})$. Pokaż, że $v - iw \in V^{\bar{\lambda}}_{\mathbf{C}}(F_{\mathbf{C}})$.
14. Udowodnij, że $\langle Av, w\rangle = \langle v, A^*w\rangle$. ($A \in M_{n\times n}(\mathbf{C})$, $v, w \in \mathbf{C}^n$, $\langle , \rangle$ standardowy.)
15. A, B to kwadratowe macierze zespolone. $\bar{A}$ to macierz której wyrazy są liczbami sprzężonymi do odpowiednich wyrazów macierzy A. Czy $\overline{AB} = \bar{B}\bar{A}$, czy może $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$? Czemu jest równe $(AB)^*$? Uzasadnij wzór $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.
16. (V jest rzeczywista.)
 a) Z twierdzenia o postaci kanonicznej przekształceń ortogonalnych V wywnioskuj, że każde takie przekształcenie jest złożeniem co najwyżej $\dim V$ odbić.
 b) Uzasadnij, że każda translacja jest złożeniem 2 odbić.
 c) Uzasadnij, że dowolna izometria V jest złożeniem co najwyżej $\dim V + 2$ odbić;
 d) Uzasadnij zupełnie inną metodą, że tak naprawdę w punkcie c) wystarczy $\dim V + 1$ odbić.
17. Załóżmy, że $v, w \in \operatorname{Lin}(\{v_1, \dots, v_k\})$, oraz że $\langle v, v_i\rangle = \langle w, v_i\rangle$ dla $i = 1, 2, \dots, k$. Wykaż, że $v = w$.
18. Niech $v_1, \dots, v_k$, $w_1, \dots, w_k$ spełniają, dla dowolnych $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, warunek $\langle v_i, v_j\rangle = \langle w_i, w_j\rangle$. Udowodnij, że istnieje przekształcenie ortogonalne/unitarne U, takie że $U(v_i) = w_i$ dla $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.
19.a) Udowodnij, że dla dowolnych $v, w \in V$ zachodzi nierówność Schwartza: $|\langle v, w\rangle| \le \|v\|\cdot\|w\|$. (Wsk. Wyrażenie $\|v - tw\|^2$ jest trójmianem kwadratowym rzeczywistego parametru t o niedodatniej delcie.)
 b) Wywnioskuj nierówność trójkąta: $(\forall v, w \in V)(\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|)$.
 c) Pokaż, że $(\forall v, w, s \in V)(\|v + w + s\| \le \|v\| + \|w\| + \|s\|)$.
 d) Używając c) udowodnij, że dla dowolnych $a, b, c \in \mathbf{R}$ zachodzi

$$\sqrt{(2a+b)^2 + (2b+c)^2 + (2c+a)^2 + (a+b+c)^2} \le \sqrt{2(a^2+b^2)} + \sqrt{2(b^2+c^2)} + \sqrt{2(c^2+a^2)}.$$