Algebra liniowa B2. Lista 3

1. Oblicz wymiary następujących przestrzeni: $\{P \in \mathbf{R}_{50}[X] : P(-X) = P(X)\}$, $\{P \in \mathbf{R}_{10}[X] : \int_{-1}^{0} P(x)dx = P'(-7) = 0\}$, $\{(x_1, \ldots, x_{100})^\top \in \mathbf{R}^{100} : \sum_{i=1}^{100}(-1)^i x_i = \sum_{i=1}^{100} x_i = \sum_{i=1}^{50} x_{2i} = 0\}$, $\{(x_1, \ldots, x_{100})^\top \in \mathbf{R}^{100} : \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = \sum_{i=1}^{50} x_{2i-1} = 0\}$, $\{P \in \mathbf{R}_3[X] : XP'''(X) + P''(X) = 0, P'(-1) + P(0) = 0\}$.
2. Niech $F : \mathbf{R}^{100} \to \mathbf{R}^7$ będzie przekształceniem liniowym. Jaki może być wymiar $\ker(F)$? Jaki może być wymiar $\mathrm{Im}(F)$? A jak będzie dla $F : \mathbf{R}^7 \to \mathbf{R}^{100}$?
3. Udowodnij, że jeśli $(v_1^*, \ldots, v_k^*)$ jest bazą dualną do bazy $B = (v_1, \ldots, v_k)$ przestrzeni V, to dla każdego $v \in V$ mamy $[v]_B = (v_1^*(v), \ldots, v_k^*(v))^\top$.
4. Załóżmy, że $\phi : V \to W$ jest izomorfizmem liniowym. Pokaż, że
 a) U jest k-wymiarową podprzestrzenią $V \iff \phi[U]$ jest k-wymiarową podprzestrzenią W.
 b) $v_1, \ldots, v_k$ są lnz $\iff \phi(v_1), \ldots, \phi(v_k)$ są lnz.
 c) $\mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_k) = U \iff \mathrm{Lin}(\phi(v_1), \ldots, \phi(v_k)) = \phi[U]$.
 d) zachodzą inne podobne własnosci – aż Ci się znudzi.
5. Uzasadnij, że jeśli $b_1, \ldots, b_n$ jest bazą V, zaś $F : V \to W$ jest izomorfizmem, to $F(b_1), \ldots, F(b_n)$ generują W. Jak bardzo potrafisz osłabić założenia tego twierdzenia?
6. Załóżmy, że $\dim(V) = n$, $W < V$, $\dim(W) = k$. Uzasadnij, że istnieje izomorfizm $F : V \to \mathbf{R}^n$, taki że $F[W] = \{(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)^\top : x_1, \ldots, x_k \in \mathbf{R}\}$. Napisz taki izomorfizm wzorem dla $V = \mathbf{R}_3[X]$, $W = \{P \in V : P'(1) + P(0) = 0\}$.
7. Załóżmy, że $b_1, \ldots, b_n$ jest bazą przestrzeni V, zaś $w_1, \ldots, w_n \in W$. Uzasadnij, że istnieje jedyne odwzorowanie liniowe $F : V \to W$ spełniające $F(b_1) = w_1, \ldots, F(b_n) = w_n$.
8. Niech $V = \{(x, y, z)^\top \in \mathbf{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$, $W = \{(x, y, z)^\top \in \mathbf{R}^3 : x = \frac{y}{3} = -\frac{z}{7}\}$. Wykaż, że (a) odwzorowanie $V \times W \ni (v, w) \mapsto v + w \in \mathbf{R}^3$ nie jest izomorfizmem; (b) $V \times W \simeq \mathbf{R}^3$.
9. Niech $W, U < V$. Uzasadnij, że jeśli $W \cap U = \{0\}$, to odzorowanie $W \times U \to W + U$ zadane wzorem $(w, u) \mapsto w + u$ jest izomorfizmem liniowym.
10. Niech $F : V \to W$ będzie funkcją. Udowodnij, że F jest liniowa $\iff F < V \times W$.
11. Niech $v = (1, 2, 3)^\top$. Opisz zbiór wszystkich $f \in (\mathbf{R}^3)^*$, takich że $f(v) = -1$. (Np. określ jak rozpoznać, czy f spełnia $f(v) = -1$, znając współrzędne f w bazie E_1^*, E_2^*, E_3^*.)
12. Niech v_1, v_2, v_3 oraz w_1, w_2, w_3 będą bazami $\mathbf{R}^3$, zaś v_1^*, v_2^*, v_3^* oraz w_1^*, w_2^*, w_3^* bazami $(\mathbf{R}^3)^*$ do nich dualnymi. Przypuśćmy, że $v_2 = w_2$ oraz $v_3 = w_3$. Czy koniecznie musi być tak, że $v_2^* = w_2^*$ i $v_3^* = w_3^*$?
13. Niech $W < V$, $\dim(V) < \infty$, $f \in W^*$. Uzasadnij, że istnieje $F \in V^*$, takie że $F|_W = f$.
14. Uzasadnij, że jeśli $W < V$, $W \neq V$, $v \in V \setminus W$, $\dim(V) < \infty$, to istnieje $f \in V^*$, takie że $f|_W = 0$, ale $f(v) \neq 0$.
15. Niech $V = \mathbf{R}^3$, zaś W niech będzie prostą w $\mathbf{R}^3$ zadaną równaniem $x = \frac{y}{3} = -z$.
 a) Sprawdź, czy wektory $v_1 + W$, $v_2 + W$ są lnz w V/W, dla (i) $v_1 = (1, 2, 3)^\top$, $v_2 = (4, 5, 6)^\top$; (ii) $v_1 = (2, 6, -2)^\top$, $v_2 = (0, 1, 2)^\top$; (iii) $v_1 = (-1, 0, 2)^\top$, $v_2 = (0, 3, 1)^\top$; (iv) $v_1 = (0, 0, 1)^\top$, $v_2 = (0, 1, 0)^\top$.
 b) Wskaż bazę B przestrzeni V/W i oblicz $[v_1]_B$, $[v_2]_B$ dla wszystkich powyższych v_1, v_2.
 c) Niech $p : V \to V/W$ będzie naturalnym rzutowaniem (zadanym przez $p(v) = v + W$). Sprawdź, że $p|_{W^\perp}$ jest izomorfizmem liniowym. Czy potrafisz uzasadnić, że to samo będzie prawdą dla dowolnej prostej W przechodzącej przez 0 w $V = \mathbf{R}^3$?
16. Załóżmy, że $v, w \in \mathbf{R}^3$ są lnz. Jaki warunek musi spełniać jednowymiarowa podprzestrzeń $W < \mathbf{R}^3$, aby $v + W, w + W$ były lz w przestrzeni ilorazowej $\mathbf{R}^3/W$? Rozważ przykład $v = (1, 1, 0)^\top$, $w = (0, 1, 1)^\top$.
17. Niech $F : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Uzasadnij, że $f : V/\ker(F) \to W$ zadane wzorem $f(v + \ker(F)) = F(v)$ jest dobrze określone i zadaje izomorfizm liniowy $V/\ker(F)$ i $\mathrm{Im}(F)$.
18. Niech $V, W < U$, $\dim(U) < \infty$. Uzasadnij, że funkcja $V/(V \cap W) \to (V + W)/W$ dana wzorem $v + V \cap W \mapsto v + W$ jest dobrze określonym izomorfizmem. Wywnioskuj wzór $\dim(V + W) + \dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W)$.
19. Oblicz wymiar przestrzeni $\{P \in \mathbf{R}_{100}[X] : \int_{-1}^{1} e^{-x^2} P(x)dx = \int_{-2}^{2} e^{-x^2} P(x)dx = 0\}$. Co potrafisz powiedzieć o wymiarze przestrzeni $\{P \in \mathbf{R}_{100}[X] : \int_{-1}^{1} e^{-x^2} P(x)dx = \int_{-2}^{2} e^{-x^2} P(x)dx = \ldots = \int_{-100}^{100} e^{-x^2} P(x)dx = 0\}$?
20. Niech dla $i = 0, \ldots, n$ funkcja $f_i : V_i \to V_{i+1}$ będzie przekształceniem liniowym, przy czym $\ker(f_{i+1}) = \mathrm{Im}(f_i)$ (dla $i = 0, \ldots, n-1$). Załóżmy ponadto, że $V_0 = V_{n+1} = \{0\}$. Udowodnij, że $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \dim(V_i) = 0$.
21. Dla liniowego $F : V \to W$ określamy $F^* : W^* \to V^*$ wzorem $F^*(f) = f \circ F$. Udowodnij, że $(V/\ker(F))^* \simeq \mathrm{Im}(F^*)$; napisz naturalny izomorfizm między tymi przestrzeniami.