Algebra liniowa B2. Lista 4

Na tej liście "układ" oznacza "układ równań liniowych". a/b oznacza zadanie b z listy a.

1. Dla poniższych układów równań znajdź rozwiązanie ogólne.
$$\begin{cases} 5x_1+3x_2+5x_3+12x_4=10 \\ 2x_1+2x_2+3x_3+5x_4=4 \\ x_1+7x_2+9x_3+4x_4=2 \end{cases} \quad \begin{cases} -9x_1+10x_2+3x_3+7x_4=7 \\ -4x_1+7x_2+x_3+3x_4=5 \\ 7x_1+5x_2-4x_3-6x_4=3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3-2x_4+x_5=4 \\ 6x_1+3x_2+5x_3-4x_4+3x_5=5 \\ 2x_1+x_2+7x_3-4x_4+x_5=11 \\ 4x_1+2x_2+2x_3-3x_4+3x_5=6 \end{cases}$$
2. Wyznacz układ fundamentalny rozwiązań układu jednorodnego:
$$\begin{cases} x_1-x_3+x_5=0 \\ x_2-x_4+x_6=0 \\ x_1-x_2+x_5-x_6=0 \\ x_2-x_3+x_6=0 \\ x_1-x_4+x_5=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5=0 \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5=0 \\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5=0 \\ 7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5=0 \end{cases}$$
3. Dla jakich prawych stron układy z zadania 2 pozostają niesprzeczne?
4. Znajdź wielomian $P(X)$ o współczynnikach rzeczywistych (a) stopnia 2, taki że $P(1)=8$, $P(-1)=2$ i $P(2)=14$; (b) stopnia 3, taki że $P(-2)=1$, $P(-1)=3$, $P(1)=13$ i $P(2)=33$;
5. Przestrzenie rozpinane przez poniższe układy wektorów opisz układami równań:
(a) $\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\7\\7\end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\8\\9\\-2\end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\4\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-5\\12\\11\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\6\\3\\-3\end{pmatrix}$.
6. Znajdź jednorodny układ równań liniowych złożony z (a) dwóch (b) trzech (c) czterech równań, dla którego wektory $(1,4,-2,2,-1)^\top$, $(1,13,-1,2,9)^\top$, $(2,7,-8,4,-5)^\top$ stanowią fundamentalny układ rozwiązań.
7. Opisz parametrycznie przestrzeń z zadania 1/14.
8. Wytłumacz, jak mając układ równań opisujący podprzestrzeń $W < \mathbf{R}^n$ i wektor $v \in \mathbf{R}^n$ wyznaczyć układ równań opisujący warstwę $v+W$. Opisz zbiór $\{(1,0,-1,1)^\top + t(1,2,1,-2)^\top + s(-1,3,4,0)^\top + u(-1,8,9,-2)^\top : t,s,u \in \mathbf{R}\}$ układem równań.
9. Napisz macierz, której wszystkie wyrazy są niezerowe a rząd jest możliwie mały.
10. Niech $B \in M_{(k+1)\times n}(\mathbf{R})$ będzie macierzą otrzymaną z $A \in M_{k\times n}(\mathbf{R})$ przez dopisanie (u dołu) jednego wiersza. Czy może się zdarzyć, że wymiar $\mathrm{Im}(F_B)$ jest mniejszy niż wymiar $\mathrm{Im}(F_A)$?
11. Uzasadnij, że zbiór prawych stron dla których układ o ustalonej macierzy głównej A jest niesprzeczny jest podprzestrzenią liniową; uzasadnij, że wymiar tej podprzestrzeni plus wymiar przestrzeni rozwiązań układu jednorodnego o tej samej macierzy głównej A jest równy liczbie kolumn A.
12. Swawolny Dyzio, dostawszy macierz 7×8 rzędu 5, wykreśla w niej 3 wiersze i 3 kolumny, starając się, aby otrzymana macierz 4×5 miała możliwie mały rząd. Czy Swawolny Dyzio zawsze jest w stanie uzyskać macierz rzędu 0? Ułóż inne, trudniejsze wersje tego zadania.
13. Zinterpretuj operacje kolumnowe w języku układów równań.
14. Uzasadnij, że jeśli układ ma co najmniej 2 rozwiązania, to rząd jego macierzy głównej jest mniejszy niż jej liczba kolumn.
15. Uzasadnij, że jeśli rząd macierzy głównej układu jest równy liczbie jej wierszy, to układ jest niesprzeczny. Podaj przykład wskazujący, że nie jest to konieczny warunek niesprzeczności.
16. Uzasadnij, że jeśli kolumny 1,3,5 macierzy A są lnz, to po dowolnej operacji wierszowej pozostaną lnz. Uogólnij. Wywnioskuj stąd, że kolumny, w których po wykonaniu eliminacji Gaussa znajdą się wyrazy wiodące, w każdym momencie procesu eliminacji są lnz. Wykorzystując to rozwiąż zadanie 2/9.
17. Niech $W < \mathbf{R}^n$, $W = \mathrm{Lin}\{v_1,\ldots,v_k\}$, $\dim W = s$. Udowodnij, że W można opisać układem $n-s$ równań.
18. Udowodnij, że jeśli układ jednorodny ma więcej niewiadomych niż równań, to ma niezerowe rozwiązanie. Udowodnij, że jeśli układ ma więcej równań niż niewiadomych, to można zmienić jego prawe strony tak, by stał się sprzeczny.
19. Jak bardzo wynik metody eliminacji zależy od dokonywanych wyborów? Czy potrafisz podać przykład układu jednorodnego, do którego można zastosować metodę Gaussa na dwa różne sposoby i otrzymać (a) dwa różne fundamentalne układy rozwiązań? (b) dwa różne podziały zmiennych na wolne i związane?
20. Uzasadnij, że rząd(A+B) $\leq$ rząd(A)+rząd(B).
21. Używając operacji wierszowych z całkowitymi skalarami spróbuj sprowadzić następujące macierze 2×1 do możliwie prostej postaci: $\binom{4}{7}$, $\binom{-6}{27}$, $\binom{147}{89}$. Rozwiń to zadanie.