Algebra liniowa B2. Lista 5

1. Oblicz $m_B(D)$, gdzie $D : \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}_n[X]$ dane jest wzorem $D(P) = P'$, zaś B jest bazą (a) $(1, X, \dots, X^n)$; (b) $(X^n, X^{n-1}, \dots, X, 1)$; (c) $(1, X-1, \frac{1}{2}(X-1)^2, \dots, \frac{1}{n!}(X-1)^n)$.
2. Niech macierzą przekształcenia $F : V \to W$ względem baz: (e_1, e_2, e_3) przestrzeni V i (f_1, f_2) przestrzeni W, będzie $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Wyznacz macierz F względem baz $(e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3)$ i (f_1, f_1+f_2).
3. Niech $F : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}_2[X]$ będzie zadane przez $m_B(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, gdzie $B = (1, X, X^2)$. Oblicz $m_C(F)$ dla $C = (3X^2+2X+1, X^2+3X+2, 2X^2+X+3)$.
4. Niech $B = \left(\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ 7 \\ -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$, $m_B(F) = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$, gdzie $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Oblicz $m_C(F)$.
5. Niech $B = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$, $m_C^B(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Znajdź C.
6. Rozważmy przekształcenie liniowe $F : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}^3$ dane wzorem $F(P) = (P(-1), P'(0), P(1))^\top$. Niech $B = (1, X, X^2)$ będzie bazą $\mathbf{R}_2[X]$, zaś $E = (E_1, E_2, E_3)$ bazą standardową $\mathbf{R}^3$. (a) Znajdź $m_E^B(F)$. (b) Niech $C = (E_1+2E_3, E_3, E_2+E_1)$. Znajdź $m_C^B(F)$. (c) Czy F jest odwracalne?
7. Wiadomo, że B, C, D to bazy $\mathbf{R}^3$, zaś $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Co więcej, $B = ((1,1,1)^\top, (0,1,1)^\top, (0,1,0)^\top)$, $m_D^C(F) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $m_B^C(F) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ -5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Znajdź D.
8. Niech $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ będzie dane wzorem $F((x,y,z)^\top) = (2x+z, x+y+z, y-z)^\top$. Niech $B = ((1,0,1)^\top, (0,1,0)^\top, (1,1,0)^\top)$. Znajdź (jeśli to możliwe) bazę C przestrzeni $\mathbf{R}^3$, taką że (a) $m_B^C(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $m_B^C(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
9. Znajdź macierze odwrotne do następujących:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$
10. Niech $V = \{P \in \mathbf{R}_4[X] : P''(1) + 3P(0) = 0\}$, zaś $F : V \to \mathbf{R}^3$ niech będzie dane wzorem $F(P) = (P(-1), P(0), P(1))^\top$. Znajdź $F^{-1}((0,1,0)^\top)$.
11. Czy jest odwracalne przekształcenie $\mathbf{R}_{22}[X] \ni P \mapsto P'' + 3P' + 2P \in \mathbf{R}_{22}[X]$?
12. Niech $E = (1)$ będzie bazą $\mathbf{R}^1$, B bazą V, zaś $f \in V^*$. Uzasadnij, że wyrazy macierzy $m_E^B(f)$ to współrzędne f w bazie V^* dualnej do bazy B. (zakładamy $\dim(V) < \infty$)
13. Niech B, B' będą bazami V; C, C' – bazami W, zaś $F : V \to W$. Uzasadnij, że rząd$(m_C^B(F))$ =rząd$(m_{C'}^{B'}(F))$.
14. Przypomnij sobie, że $\mathrm{Im}(F \circ G) \subseteq \mathrm{Im}(F)$, $\ker(F \circ G) \supseteq \ker(G)$. (a) Wywnioskuj, że rząd(AB) $\le$rząd(A), rząd(AB) $\le$rząd(B). (b) Uzasadnij, że jeśli $G : V \to W$, $F : W \to Z$, przy czym $\dim(V) = \dim(Z) = 9$, $\dim(W) = 7$, to $G \circ F$ nie jest izomorfizmem.
15. Niech $C = (c_1, \dots, c_n)$ będzie bazą V, zaś $b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_j$ dla $i = 1, \dots, n$. Udowodnij, że $B = (b_1, \dots, b_n)$ jest bazą $V \iff A = (a_{ij})$ jest odwracalna. Czy wtedy $A = m_C^B(\mathrm{id})$, czy też może $A = m_B^C(\mathrm{id})$?
16. Niech $F : V \to V$, $W < V$, $F[W] \subseteq W$. Niech $(b_1, \dots, b_k)$ będzie bazą W, zaś $B = (b_1, \dots, b_n)$ bazą V.
 a) Wykaż, że wzór $\overline{F}(v + W) = F(v) + W$ zadaje dobrze określone przekształcenie liniowe $\overline{F} : V/W \to V/W$.
 b) Uzasadnij, że $B' = (b_{k+1} + W, \dots, b_n + W)$ jest bazą V/W.
 c) Jak ma się $m_B(F)$ do $m_{B'}(\overline{F})$?
17. Niech $F : V \to W$, B niech będzie bazą V, a C – bazą W. Niech $F^* : W^* \to V^*$ będzie dane wzorem $F^*(f) = f \circ F$. Wyraź $m_{B^*}^{C^*}(F^*)$ przez $m_C^B(F)$.
18. Wykaż, że dla dowolnego niezerowego funkcjonału f na (skończenie wymiarowej) przestrzeni V istnieje baza $(b_1, \dots, b_n)$ przestrzeni V, taka że $f(\sum_{i=1}^n t_i b_i) = t_1$ (dla wszelakich skalarów $t_1, \dots, t_n$). Znajdź taką bazę dla $V = \mathbf{R}_n[X]$, $f(P) = \int_0^1 P(X)dX$; czy jest ona jedyna?
19. Niech B będzie pewną (skończoną) bazą V. Dozwolone są następujące operacje: zamiana kolejności wektorów, pomnożenie wektora przez niezerowy skalar, dodanie skalarnej krotności pewnego wektora do innego wektora. Czy każdą bazę V można uzyskać z B przez ciąg takich operacji?