Algebra liniowa B2. Lista 6

1. Wyznacz liczbę nieporządków w ciągach: $(3,5,2,1,6,4,8,7)$; $(2,4,1,7,6,5,3)$; $(3,5,8,7,2,6,1,4)$
2. Wyjaśnij które z podanych iloczynów (i z jakim znakiem) występują w rozwinięciu wyznacznika odpowiedniego (jakiego?) stopnia: a) $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}$; b) $a_{31}a_{13}a_{52}a_{45}a_{24}$; c) $a_{34}a_{21}a_{46}a_{17}a_{73}a_{54}a_{62}$.
3. Wybierz takie wartości i,j,k aby iloczyn $a_{51}a_{i6}a_{1j}a_{35}a_{44}a_{6k}$ wystąpił ze znakiem minus w rozwinięciu wyznacznika stopnia 6.
4. Wykorzystując wzór na pełne rozwinięcie wyznacznika (lub inaczej) oblicz
$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$
$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$
8. Za pomocą pełnego rozwinięcia oblicz wartość wyznacznika, którego elementy na głównej przekątnej są wszystkie równe 1, elementy j-tego wiersza są równe $a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_j = 1, a_{j+1}, \dots, a_n$, a wszystkie pozostałe wyrazy są równe 0.
5. W rozwinięciu wyznacznika $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$ znajdź te wyrazy, które zawierają a) x^3; b) x^4.
6. Oblicz wyznaczniki:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & 7 & -3 & 8 & -9 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$
7. Jak zmieni się wartość wyznacznika stopnia n jeśli:
   a) znak każdego z jego wyrazów zmienić na przeciwny?
   b) każdy element a_{ij} pomnożyć przez c^{i-j}, $c \neq 0$?
   c) pierwszą kolumnę przestawić na ostatnie miejsce, a pozostałe przesunąć w lewo, zachowując ich porządek?
   d) wiersze zapisać w odwrotnym porządku?
8. Wykazać, że dowolny wyznacznik jest równy połowie sumy dwóch wyznaczników, z których jeden jest otrzymany z danego przez dodanie do wszystkich wyrazów i-tego wiersza liczby a, a drugi jest otrzymany z danego przez dodanie do wszystkich wyrazów i-tego wiersza liczby $-a$.
9. Uzasadnij, że jeśli A i B są macierzami kwadratowymi, to $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$. (Wsk. Rozważ pełne rozwinięcie wyznacznika; uzasadnij, że jeśli w pewnym wyrazie tego rozwinięcia jednym z czynników jest jakiś element macierzy C, to innym czynnikiem w tym samym wyrazie musi być 0.)

Zadania różne

10. Udowodnij, że jeśli A, B są macierzami kwadratowymi, oraz $AB = I$, to i $BA = I$.
11. Uzasadnij, że jeśli B jest bazą V, to rząd macierzy $([v_1]_B, \dots, [v_k]_B)$ jest równy $\dim \mathrm{Lin}(\{v_1, \dots, v_k\})$.
12. Załóżmy, że $V, W < Z$, $\dim Z = 10$, $\dim V = 7$, $\dim W = 4$. Uzasadnij, że $V \cap W \neq \{0\}$. Czy prawdą jest, że dla dowolnego $z \in Z$ mamy $(z + V) \cap W \neq \emptyset$?
13. Jakie są możliwe wymiary przestrzeni $V \cap W$, jeśli $V, W < Z$, $\dim Z = 10$, $\dim V = 7$, $\dim W = 4$?
14. Czy wielomiany stopnia parzystego tworzą podprzestrzeń przestrzeni wielomianów?