Algebra liniowa B2. Lista 7

1. Oblicz wyznaczniki przez sprowadzenie do postaci trójkątnej:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Oblicz wyznaczniki:
$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n+x \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \dots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \dots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

3. Oblicz rekurencyjnie wyznaczniki:
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a+b \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

4. Oblicz podane wyznaczniki, zapisując je w postaci iloczynu wyznaczników (w drugim z nich $s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$):
$$\begin{vmatrix} \cos(x_1-y_1) & \cos(x_1-y_2) & \dots & \cos(x_1-y_n) \\ \cos(x_2-y_1) & \cos(x_2-y_2) & \dots & \cos(x_2-y_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(x_n-y_1) & \cos(x_n-y_2) & \dots & \cos(x_n-y_n) \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

5. Z tego, że liczby 1798, 2139, 3255 i 4867 dzielą się przez 31 wywnioskuj, że następujący wyznacznik jest podzielny przez 31: $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$.

6. Wskaż maksymalnego rozmiaru niezerowy minor macierzy $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 6 & 10 \\ 3 & -2 & 0 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & 11 & 7 & 15 \end{pmatrix}$.

7. Pewna macierz 50×100 ma niezerowy minor rozmiaru 37×37. Co można powiedzieć o wymiarze jądra przekształcenia zadanego tą macierzą?

8. Udowodnij, że $\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{kj} = \delta_{ik} \cdot \det(A)$, gdzie $\delta_{ik} = 0$ jeśli $i \neq k$, $\delta_{ik} = 1$ jeśli $i = k$.

9. Niech V będzie k-wymiarową podprzestrzenią $\mathbf{R}^n$. Udowodnij, że istnieją $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$, takie że odwzorowanie $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ dane przez $F((x_1, \ldots, x_n)^\top) = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})^\top$ po obcięciu do V jest izomorfizmem $V \to \mathbf{R}^k$.

10. Niech $V < V'$, $\dim V = k$, $\dim V' = n$. Udowodnij, że
    a) istnieją: $(n-k)$-wymiarowa przestrzeń liniowa W i odwzorowanie $F : V' \to W$, takie że $V = \ker(F)$;
    a) istnieją: k-wymiarowa przestrzeń liniowa Z i odwzorowanie $F : Z \to V'$, takie że $V = \mathrm{Im}(F)$.

11. Czy aby wyznaczyć rząd $A^\vee$ wystarczy znać rząd A? (A jest kwadratowa.)

12. Udowodnij, że jeśli $F : V \to V$, a B i C są bazami V, to $\det(m_B(F)) = \det(m_C(F))$.

13. Udowodnij, że jeśli dla każdej pary $i \neq j$ zachodzi $(n-1)|a_{ij}| < |a_{ii}|$, to $\det(a_{ij}) \neq 0$.

14. Niech $f(x) = a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1}$. Wykaż, że cyrkulant $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$ jest równy iloczynowi $f(\epsilon_1)f(\epsilon_2)\ldots f(\epsilon_n)$, gdzie $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ są wszystkimi pierwiastkami z 1 stopnia n. (Wsk. pomnóż przez odpowiedni wyznacznik Vandermonde'a.)

15. Udowodnij, że jeśli dla pewnego $x \in \mathbf{R}$ zachodzi $\begin{vmatrix} f_1(x) & f_1'(x) & \dots & f_1^{(n-1)}(x) \\ f_2(x) & f_2'(x) & \dots & f_2^{(n-1)}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x) & f_n'(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$, to $f_1, \ldots, f_n$ są lnz (w przestrzeni wszystkich funkcji z $\mathbf{R}$ w $\mathbf{R}$).