Algebra liniowa 1A, lista 10
listy w formatach .ps i .pdf są dostępne na stronie
`http://www.math.uni.wroc.pl/ dymara`

Ćwiczenia (kartkówka 16 grudnia)

1. Sprawdź bezpośrednim rachunkiem:
(a) $\langle A\times B, C\rangle = \langle B\times C, A\rangle$; (b) $(A\times B)\perp A$, $(A\times B)\perp B$; (c) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$;
(d) $A\times(B\times C)+B\times(C\times A)+C\times(A\times B)=0$.

2. Które z wyrażeń opisują wektor, które liczbę, a które są bez sensu (A, B, C to wektory, $\lambda\in\mathbf{R}$): (a) $\langle C\times(\lambda B), A\rangle$; (b) $\langle C,(\lambda B)\rangle\times A$; (c) $A\times(\langle C,B\rangle B)$; (d) $\lambda\langle A,B\rangle$; (e) $\lambda(A\times B)$; (f) $\langle A,B\rangle + A\times B$; (g) $\langle A,B\rangle(A\times B)$;

3. Uprość wyrażenia: (a) $A\times(A\times C)$; (b) $\langle A\times(B+A\times C), A\rangle$; (c) $\langle A+A\times B, A+B\rangle$.

4. Znajdź cosinus kąta między płaszczyznami $2x+7y-z=5$, $-x+y+3z=7$.

5. Zamień równanie płaszczyzny/prostej na parametryczne/nieparametryczne:
(a) $X=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}$; (b) $x+2y+3z=4$; (c) $X=\begin{pmatrix}1\\0\\7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}$; (d) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+5}{-1}$.

6. Sprawdź, że $(x-y)(y-z)(z-x)=\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ 1 & y & y^2\\ 1 & z & z^2\end{vmatrix}$, $\det(A+B, B+C, C+A)=2\det(A,B,C)$.

7. Znajdź (na dwa sposoby) pola równoległoboków rozpiętych przez pary wektorów
(a) $\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$.

8. Sprawdź, czy następujące układy wektorów są dodatnio czy ujemnie zorientowane:
(a) $\begin{pmatrix}1\\6\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix}1\\6\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\7\\2\end{pmatrix}$.

9. Oblicz wyznaczniki:
$\begin{vmatrix}1&2&3\\5&1&4\\3&2&5\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}-1&5&4\\3&-2&0\\-1&3&6\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}a&d&e\\0&b&f\\0&0&c\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&1&-1\\3&5&5\\-2&2&2\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}a&-1&0\\b&x&-1\\c&0&x\end{vmatrix}$.

10. Niech $P=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, niech Π będzie płaszczyzną o równaniu $4x+y-z=2$, zaś ℓ niech będzie prostą $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{7}=\frac{z-(-2)}{3}$. Napisz nieparametryczne równanie
(a) płaszczyzny przechodzącej przez P i równoległej do Π;
(b) płaszczyzny przechodzącej przez P i zawierającej ℓ;
(c) prostej przechodzącej przez P i prostopadłej do Π;
(d) prostej przechodzącej przez P i równoległej do ℓ.

Zadania (kartkówka 6 stycznia)

1. Układ wektorów $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ nazywamy bazą $\mathbf{R}^3$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wektor $X\in\mathbf{R}^3$ zapisuje się jednoznacznie jako kombinacja liniowa wektorów $X_1,\ldots,X_n$. Uzasadnij, że $(X_1,\ldots,X_n)$ jest bazą $\mathbf{R}^3$ wtedy i tylko wtedy gdy $n=3$ i wektory X_1, X_2, X_3 są liniowo niezależne.

2. Uzasadnij, że jeśli $A+B+C=0$, to $A\times B=B\times C=C\times A$.

3. Jaki jest związek między objętością czworościanu o wierzchołkach O, U, V, W a liczbą $\det(U,V,W)$?

4. W wyznaczniku 3×3 pewne 3 wyrazy są równe 1, a pozostałe są zerami. Jakie są możliwe wartości tego wyznacznika?

5. Dla każdej ściany F czworościanu określamy wektor n_F jako wektor prostopadły do F, o długości równej polu ściany F i skierowany na zewnątrz czworościanu. Pokaż, że dla dowolnego czworościanu suma wszystkich czterech tak określonych wektorów odpowiadających jego ścianom jest równa 0. (Wsk. Obierz początek układu O w jednym z wierzchołków; oznacz wektory wodzące pozostałych wierzchołków przez U, V, W i wyraź wszystko w terminach tych 3 wektorów).

6. Znajdź cosinus kąta między płaszczyzną $y - 5z - 1 = 0$ a prostą $3x + 4y = 0$, $z = 0$.

7. Napisz równania parametryczne i nieparametryczne prostej będącej przekrojem płaszczyzn $x+y+z = 7$, $x + 2y - z = 3$.

8. Udowodnij, że proste $X = A + tB$, $X = C + tD$ zawierają się w pewnej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy gdy $\langle A, B \times D\rangle = \langle C, B \times D\rangle$.

9. Używając warunku z zadania 7 stwierdź, czy proste $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ leżą w jednej płaszczyźnie. Jeśli tak, znajdź równanie tej płaszczyzny.

10. Znajdź równanie nieparametryczne płaszczyzny zawierającej prostą $\frac{x-1}{3} = \frac{-1-2y}{4} = \frac{3z+9}{-6}$ i prostopadłej do płaszczyzny $-x + 4y - 2z = 100$.

11. Znajdź równanie płaszczyzny zawierającej proste $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1-x}{-2} = \frac{2y+2}{-8} = \frac{z+3}{2}$.

12. Znajdź równanie płaszczyzny przechodzącej przez $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i równoległej do wektora $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

13. Dane są wierzchołki czworościanu $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Oblicz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka D na płaszczyznę ściany ABC.

14. O wektorze U wiadomo, że: (1) jest wektorem wodzącym punktu leżącego na płaszczyźnie $x - y + 2z + 3 = 0$, (2) jest prostopadły do wektora $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, (3) czworościan zbudowany na wektorach U, W, $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ma objętość 12. Znajdź U.

15. Dane są niewspółliniowe wektory U, V w $\mathbf{R}^3$. Znajdź rzut wektora X na płaszczyznę Π przechodzącą przez O i rozpinaną przez wektory U, V w następujących krokach:

(a) rzut X' wektora X należy do Π, więc jest kombinacją liniową U i V (z nieznanymi współczynnikami);

(b) różnica $X - X'$ jest wektorem prostopadłym do Π, a więc prostopadłym zarówno do U jak i do V; zapisanie tej informacji w postaci równań pozwala obliczyć współczynniki rozkładu X' w kombinację liniową wektorów U i V, a więc i sam wektor X' (w terminach U, V oraz X).

16. Uzasadnij, że jeśli układ A, B, C jest dodatnio zorientowany, to również układy $-A$, $-B$, C; $A+B$, B, C są dodatnio zorientowane.

17. Uprość wyrażenie $\langle D \times (A + D), (A \times B) \times (C \times A)\rangle$.

18. Wyprowadź wzory na odległość punktu A: (a) od prostej $X = tU$; (b) od płaszczyzny $\langle X, V\rangle = 0$.

19. W oznaczeniach ćwiczenia 10, napisz równanie nieparametryczne

(a) prostej przechodzącej przez P, równoległej do Π i prostopadłej do ℓ;

(b) płaszczyzny Π' zawierającej ℓ i takiej, że kąt między Π a Π' jest równy kątowi między Π a ℓ.

20. Dwie proste w $\mathbf{R}^3$ mogą się przecinać, być równoległe, lub ani jedno ani drugie (wtedy nazywamy je skośnymi). Dla każdej z tych trzech możliwości ułóż możliwie dużo zadań pytających o kąty/punkty/płaszczyzny/proste (w duchu ćwiczenia 10 i zadania 19).

21. Podaj (możliwie nietrywialny) przykład pary prostych (a) przecinających się, (b) równoległych, (c) skośnych. Dla tych przykładów rozwiąż zadania ułożone w poprzednim zadaniu.