**Algebra liniowa 1A, lista 11**

listy w formatach .ps i .pdf są dostępne na stronie
`http://www.math.uni.wroc.pl/ dymara`

**Ćwiczenia** (kartkówka 6 stycznia)

1. Rozwiąż poniższe układy metodą eliminacji Gaussa, jak również używając wzorów Cramera.

$$(a)\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x+2y+z=0 \\ x+y+2z=9 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} x+y+z=6 \\ -x+y+z=0 \\ x-y+z=2 \end{cases} \quad (c)\begin{cases} 2x-y-z=4 \\ 3x+4y-2z=11 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$$

2. Znajdź macierz (a) rzutu (prostokątnego) na płaszczyznę $3x+2y-z=0$; (b) rzutu (prostokątnego) na prostą $X=t\begin{pmatrix}1\\0\\-7\end{pmatrix}$; (c) symetrii względem prostej $X=t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

3. Nałóż macierz na wektor:
(a) $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&-5&-1\\-2&1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix}2&-3&0\\-1&3&-2\\5&0&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\6\\1\end{pmatrix}$.

4. Oblicz iloczyny macierzy:

$$(a)\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&3\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&1\\2&1&2\\1&3&1\end{pmatrix} \quad (b)\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}^2 \quad (c)\begin{pmatrix}1&0&0\\s&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0&0\\0&5&0\\0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&t&0\end{pmatrix}$$

5. Czy przekształcenia zadane macierzami z zadania 4(a) zachowują orientację? A ich złożenie?

6. Napisz macierze obrotów o kąt $\theta$ wokół osi $OX$ i wokół osi $OY$. Dla $\theta=\pi/2$ oblicz złożenia tych obrotów w obu możliwych kolejnościach.

**Zadania** (kolokwium 13 stycznia)

1. Wyznacz wielomian $f(x)$ drugiego stopnia o współczynnikach rzeczywistych, taki że $f(1)=8$, $f(-1)=2$, $f(2)=14$.

2. Rozwiąż następujące układy równań z parametrem $a$:

$$(a)\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=1 \\ x+ay-z=-1 \end{cases}$$

3. Uzasadnij, że równoległościan (o wierzchołku w $O$) rozpięty przez wektory $U, V, W$ to $\{tU+sV+uW \mid 0\leq s,t,u\leq 1\}$. Uzasadnij, że obrazem przez przekształcenie liniowe $P$ równoległościanu rozpiętego przez wektory $U$, $V$, $W$ jest równoległościan rozpięty przez wektory $P(U)$, $P(V)$, $P(W)$.

4. Używając zadania 3 uzasadnij, że objętość równoległościanu mnoży się przez $|\det(P)|$ gdy nakładamy nań przekształcenie liniowe $P$.

5. Niech $\ell$ będzie prostą $X=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$. Znajdź prostą przechodzącą przez $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ i przecinającą $\ell$ pod kątem prostym.

6. Niech $\Psi:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ będzie funkcją liniową. Pokaż że istnieje wektor $A\in\mathbf{R}^3$ (zależący od $\Psi$), taki że $\Psi(X)=\langle X,A\rangle$.

7. Niech $\Psi:\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ będzie dwuliniową funkcją antysymetryczną. Uzasadnij, że istnieje wektor $B\in\mathbf{R}^3$ (zależący od $\Psi$), taki że $\Psi(X,Y)=\langle X\times Y,B\rangle$.

8. Niech $X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $X_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. Uzasadnij, że układ $(X_1,X_2,X_3)$ jest liniowo niezależny. Dla dowolnego wektora $U$ oznaczmy przez $u^1,u^2,u^3$ współczynniki w przedstawieniu wektora $U$

w postaci kombinacji liniowej $X_1, X_2, X_3$: $U = u^1X_1 + u^2X_2 + u^3X_3$. Określmy $\Phi(U,V,W) = \begin{vmatrix} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix}$. Uzasadnij, że $\Phi(U,V,W) = C\det(U,V,W)$ i znajdź $C$.

9. Niech prosta $\ell$ będzie zadana równaniem $X = t\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$. Wyprowadź wzór na macierz rzutu na prostą $\ell$, jak również wzór na macierz symetrii względem tej prostej.

10. Niech $P$ będzie rzutem na płaszczyznę $x = 0$, zaś $Q$ rzutem na płaszczyznę $x+z = 0$. Napisz macierze $m(P)$ i $m(Q)$. Oblicz macierz $m((P \circ Q)^n) = (m(P)m(Q))^n$; jak zachowują się wyrazy tej macierzy gdy $n \to +\infty$? Spróbuj geometrycznie wyobrazić sobie co się dzieje z dowolnym wektorem $X$, gdy wielokrotnie stosować do niego na przemian $Q$ i $P$.

11. Mówimy, że ciąg wektorów $(X_n)_{n=1,2,\ldots}$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, zbiega do wektora $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ jeśli $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$, $\lim_{n\to+\infty} z_n = z$. Uzasadnij, że jeśli $A$ jest przekształceniem liniowym, zaś $(X_n)$ zbiega do $X$, to ciąg $(A(X_n))$ zbiega do $A(X)$.

12. Które ze wzorów są prawdziwe? Udowodnij lub podaj kontrprzykład. ($M$, $N$ to macierze, $a \in \mathbf{R}$).
$\det(M+N) = \det(M)\det(N)$;
$\det(M+N) = \det(M) + 2\det(MN) + \det(N)$;
$\det(aM) = a\det(M)$;
$\det(aM) = a^3\det(aM)$;
$\det(MN^2M^2) = \det(M)^3\det(N)^2$.

13. Uzasadnij, że dla dowolnego wektora $A \in \mathbf{R}^3$ przekształcenie $M_A$ zadane wzorem $M_A(X) = A \times X$ jest liniowe. Wyraź jego macierz przez współrzędne wektora $A$.

14. W oznaczeniach zadania 13, znajdź macierz przekształcenia $M_A \circ M_B - M_B \circ M_A$ (wyraź jej wyrazy przez współrzędne $A$, $B$). Przyjrzyj się tej macierzy uważnie.