Algebra liniowa 1A, lista 12

Wszystkie macierze o jakich mowa na tej liście to macierze 3×3.

Ćwiczenia (kartkówka 20 stycznia)

1. Uzasadnij następujące wzory. Załóż, że występujące w nich macierze odwrotne istnieją. M, N to macierze 3×3, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, I to macierz przekształcenia identycznościowego. a) $\det(MNM^{-1}) = \det(N)$; b) $(M^{-1})^{-1} = M$; c) $\det(M^{-1}) = (\det(M))^{-1}$; d) $(\lambda I - M)^{-1} - (\mu I - M)^{-1} = (\lambda - \mu)(\mu I - M)^{-1}(\lambda I - M)^{-1}$.

2. Znajdź M^{-1}. Wypróbuj wszelkie znane Ci sposoby. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

3. Napisz macierz M układu $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = y_1 \\ -x_2 + 2x_3 = y_2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = y_3 \end{cases}$. Znajdź M^{-1}, a następnie rozwiąż układ dla (a) $y_1 = y_2 = y_3 = 0$; (b) $y_1 = y_2 = y_3 = 1$; (c) $y_1 = 1, y_2 = -2, y_3 = 3$; (d) $y_1 = -6, y_2 = -3, y_3 = 3$;

4. Znajdź wszystkie rozwiązania układu $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = y_1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = y_2 \\ x_1 + 7x_2 + -4x_3 = y_3 \end{cases}$ dla (a) $y_1 = y_2 = y_3 = 0$; (b) $y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 3$; (c) $y_1 = 2, y_2 = 4, y_3 = 2$; (d) $y_1 = -1, y_2 = 3, y_3 = 0$; (e) $y_1 = 1, y_2 = 0, y_3 = 3$.

5. Znajdź wszystkie rozwiązania układu $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = y_1 \\ 3x_1 + 9x_2 - 6x_3 = y_2 \\ -2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = y_3 \end{cases}$ dla (a) $y_1 = y_2 = y_3 = 0$; (b) $y_1 = 1, y_2 = 3, y_3 = 0$; (c) $y_1 = y_2 = y_3 = 1$; (d) $y_1 = 4, y_2 = 12, y_3 = -8$;

6. Uzasadnij, że tylko macierz $N = I$ spełnia warunek: $(\forall M \in M_{3\times 3}(\mathbf{R}))\ MN = M$.

Zadania (kartkówka 20 stycznia)

1. Uzasadnij, że jeśli wiersze macierzy M są skalarnymi krotnościami pewnego "wektora wierszowego", to również kolumny M są krotnościami pewnego wektora. Zinterpretuj ten fakt w terminach układów równań.

2. Niech A będzie przekształceniem liniowym $\mathbf{R}^3$; U, V – parą liniowo niezależnych wektorów. Załóżmy, że $A(U) = A(V) = 0$. Załóżmy też, że dla pewnego wektora W mamy $A(W) \neq 0$.
a) Udowodnij, że U, V, W sa liniowo niezależne.
b) Pokaż, że dla dowolnego wektora $X \in \mathbf{R}^3$ istnieje skalar $\lambda(X) \in \mathbf{R}$, taki że $A(X) = \lambda(X)A(W)$.
Zastanów się jak sformułować rezultat tego zadania w terminach układów równań.

3. Niech A będzie przekształceniem liniowym $\mathbf{R}^3$, $U, V, W \in \mathbf{R}^3$. Załóżmy, że $A(U) = 0$, $A(V) \neq 0$, $A(W) \neq 0$. Czy V, W muszą być liniowo niezależne?

4. Podaj przykład macierzy M, takiej że $\det M = 0$ oraz $\{X \in \mathbf{R}^3 : MX = 0\} \subseteq \{Y \in \mathbf{R}^3 : (\exists X)\ MX = Y\}$.

5. Udowodnij, że jeśli M, N są macierzami odwracalnymi, to i macierze MN, NM są odwracalne. Wyraź macierze do nich odwrotne przez M^{-1}, N^{-1}.

6. Uzasadnij, że jeśli istnieją macierze N, K, takie że $NM = MK = I$, to M jest odwracalna oraz $N = K = M^{-1}$.

7. Przypomnienie: macierz transponowaną do macierzy M definiujemy wzorem $(M^\top)_{ij} = M_{ji}$. Uzasadnij, że $(MN)^\top = N^\top M^\top$. Uzasadnij, że jeśli M jest odwracalna, to i $M^\top$ jest odwracalna, oraz $(M^\top)^{-1} = (M^{-1})^\top$.

8. Uzasadnij, że jeśli $N^2 = 0$, to $(I + N)^{-1} = I - N$. Znajdź w ten sposób $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

9. Uzasadnij, że jeśli $N^3 = 0$, to $(I + N)^{-1} = I - N + N^2$. Użyj tego wzoru by policzyć $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

10. Uzasadnij, że jeśli $MN = I$, to M i N są odwracalne i $M^{-1} = N$, $N^{-1} = M$.

11. Uzasadnij, że istnieje $\epsilon > 0$, taki że jeśli macierz N spełnia warunek

$$(\forall i, j \in \{1, 2, 3\}) \quad |N_{ij}| < \epsilon$$

to macierz $I + N$ jest odwracalna. Czy potrafisz podać jakąś konkretną wartość ϵ spełniającą powyższą tezę (im większa tym lepsza)? (wsk: oszacuj, jak bardzo $\det(I + N)$ różni się od 1).