Algebra liniowa 1A, lista 13

Ćwiczenia (kartkówka 20 stycznia)

1. Wektory $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ są wektorami własnymi przekształcenia liniowego $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ o wartościach własnych odpowiednio $-1, -3, 2$. Znajdź macierz M tego przekształcenia korzystając z diagonalizacji. Wskazówka: $M = PDP^{-1}$ dla odpowiednich macierzy P i D.

2. Bezpośrednio wyliczając sprawdź, że wektory własne macierzy symetrycznej $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ odpowiadające różnym wartościom własnym, są do siebie prostopadłe.

3. Znajdź wartości i wektory własne. Porównaj krotność pierwiastka wielomianu charakterystycznego z maksymalną możliwą liczbą odpowiadających jej liniowo niezależnych wektorów własnych.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Znajdź wielomian charakterystyczny macierzy (a) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Znajdź wartości własne pierwszej macierzy z poprzedniego ćwiczenia.

6. Uzasadnij, że jeśli $\det(M - xI) = (a - x)(b - x)(c - x)$, to $\mathrm{tr}M = a + b + c$, $\det M = abc$.

7. Dla macierzy 3×3 udowodnij wzory $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$, $\mathrm{tr}(MNM^{-1}) = \mathrm{tr}(N)$, $\det(PMP^{-1} - \lambda I) = \det(M - \lambda I)$.

Zadania (kartkówka 27 stycznia)

1. Zdiagonalizuj macierz M: znajdź wartości własne i bazę wektorów własnych; zapisz M w postaci PDP^{-1} z diagonalnym D; znajdź nowe współrzędne w których macierz M staje się diagonalna; wyraź nowe współrzędne przez stare, a stare przez nowe. $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Uzasadnij, że dla dowolnego przekształcenia liniowego $T : R^3 \to R^3$ o trzech różnych wartościach własnych t_1, t_2, t_3 zachodzi równość $\det(m(T)) = t_1 t_2 t_3$. Wsk.: skorzystaj z diagonalizacji.

3. Znajdź wektory i wartości własne dla (a) obrotu o kąt θ wokół pewnej prostej; (b) rzutu na prostą; (c) rzutu na płaszczyznę; (d) symetrii względem prostej; (e) symetrii względem płaszczyzny. (O wszystkich prostych i płaszczyznach o których mowa w tym zadaniu zakładamy, że przechodzą przez 0.)

4. Uzasadnij, że jeśli przekształcenie A jest odwracalne, to A^{-1} ma te same wektory własne co A.

5. Niech ciąg (a_n) będzie zadany rekurencyjnie: $a_0 = 1$, $a_1 = 7$, $a_2 = -1$, $a_{n+3} = 4a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n$. Wyprowadź jawny wzór na n-ty wyraz tego ciągu.

6. Dla każdej z poniższych macierzy symetrycznych znajdź układ jednostkowych prostopadłych wektorów X_1, X_2, X_3 będących wektorami własnymi przekształceń zadanych tymi macierzami:
(a) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Przeprowadź diagonalizacje tych macierzy i oblicz (korzystając z tych diagonalizacji) piąte potęgi wszystkich trzech macierzy.

7. Uzasadnij, że jeśli X, Y są wektorami własnymi macierzy symetrycznej S odpowiadającymi różnym wartościom własnym, to $X \perp Y$. Podaj przykład pokazujący, że założenie $S = S^{\mathsf{T}}$ jest istotne.

8. Niech $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. Znajdź możliwie małe $C > 0$, takie że $\forall X \in \mathbf{R}^3$, $|SX| \leq C|X|$.

9. Niech $S = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Uzasadnij, że istnieje $C > 0$, takie że $\forall X \in \mathbf{R}^3$, $|SX| \leq C|X|$. Znajdź możliwie małe C spełniające ten warunek (wsk.: zdiagonalizuj S w bazie parami prostopadłych, jednostkowych wektorów).

10. Załóżmy, że $S = -S^{\top}$. Wzorując się na podanym na wykładzie dowodzie diagonalizacji macierzy symetrycznych, wykaż że istnieją parami prostopadłe, jednostkowe wektory X_1, X_2, X_3 i liczby $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ takie że $SX_1 = \lambda X_1$, $SX_2 = -\mu X_3$, $SX_3 = \mu X_2$.
11. Uzasadnij, że wyznacznik izometrii liniowej jest równy ± 1.
12. Uzasadnij, że jeśli A jest liniową izometrią $\mathbf{R}^3$, to $|\mathrm{tr}(A)| \leq 3$. Znajdź wszystkie izometrie o śladzie ± 3.
13. Uzasadnij, że jeśli A, B są dwoma kolumnami macierzy izometrii, to trzecia kolumna tej macierzy jest równa $\pm A \times B$.
14. Napisz co najmniej trzy macierze izometrii w których pierwszym wierszem jest $(3/5, \sqrt{7}/5, -3/5)$.
15. Niech V będzie wektorem własnym liniowej izometrii A przestrzeni $\mathbf{R}^3$. Niech $V^{\perp} = \{U \in \mathbf{R}^3 : \langle U, V \rangle = 0\}$. Uzasadnij, że $A(V^{\perp}) \subseteq V^{\perp}$.
16. Niech A będzie liniową izometrią $\mathbf{R}^3$ zmieniającą orientację, i niech V będzie jej wektorem własnym, $A(V) = V$. Uzasadnij, że A jest odbiciem względem pewnej płaszczyzny.