Algebra liniowa 1A, Lista 2

Ćwiczenia (Kartkówka 14 października)

1. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A = \binom{1}{2}$ i prostopadłej do wektora $U = \binom{-1}{1}$.

2. Napisz we współrzędnych parametryczne równanie prostej

(a) $y = 2x - 1$, (b) $y = 7$, (c) $x = -1$, (d) $2x + 3y = 5$.

3. Znajdź $P_U(V)$ i $P_V(U)$ gdy

(a) $U = \binom{1}{1}$, $V = \binom{-2}{2}$, (b) $U = \binom{0}{1}$, $V = \binom{3}{1}$.

4. Znajdź kąt między U i V:

(a) $U = \binom{1}{1}$, $V = \binom{-2}{2}$, (b) $U = \binom{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$, $V = \binom{1}{1}$, (c) $U = \binom{2}{1}$, $V = \binom{-4}{-2}$.

5. Sprawdź własności wyznacznika podane na wykładzie.

6. Czy para wektorów $U = \binom{-3}{2}$, $V = \binom{-4}{3}$ jest dodatnio zorientowana? Oblicz pole równoległoboku rozpiętego przez wektory U i V jak również pole trójkąta OUV.

7. Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $\binom{-5}{2}$, $\binom{1}{4}$, $\binom{3}{-6}$.

8. Dla jakich a, b układ równań

$$\begin{cases} -2x + 3y = a \\ 4x - 6y = b \end{cases}$$

ma rozwiązanie?

9. Używając wzorów wyznacznikowych znajdź rozwiązanie układu równan

$$\begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ 4x + 6y = -2 \end{cases}$$

Zadania (Kartkówka 21 października)

1. Niech U będzie niezerowym wektorem. Równanie $X = A+tU$ jest parametrycznym równaniem pewnej prostej. Uzasadnij, że dla dowolnych niezerowych liczb rzeczywistych a, b równanie $X = (A + aU) + t(bU)$ jest równaniem parametrycznym tej samej prostej.

2. Niech ℓ będzie prostą, zaś p tym punktem na prostej ℓ który leży najbliżej początku układu współrzędnych. Uzasadnij, że wektor wodzący punktu p jest prostopadly do ℓ.

3. Używając zadania 2 znajdź odległość punktu $\binom{0}{0}$ od prostej $-2x + 5y = 7$.

4. Wyprowadź wzór na odległość punktu $A = \binom{x_0}{y_0}$ od prostej

(a) $ax + by = 0$, (b) $ax + by = c$, (c) $X = B + tU$, gdzie $B = \binom{b_1}{b_2}$, $U = \binom{u_1}{u_2}$.

5. Znajdź współrzędne punktu, w którym promień światła biegnący od punktu $A = \binom{-3}{2}$ musi odbić się od osi OX (zgodnie z zasadą: kąt padania jest równy kątowi odbicia) aby dotrzeć do punktu

(a) $\binom{3}{4}$, (b) $\binom{7}{3}$, (c) $\binom{-11}{3}$.

6. Uzasadnij, że proste $y = ax + b$ i $y = cx + d$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy gdy $ac = -1$.

7. Znajdź kąt między środkowymi trójkąta ABC poprowadzonymi z wierzchołków A i C wiedząc że $A = \binom{1}{-2}$, $B = \binom{2}{4}$, $C = \binom{0}{3}$.

8. Dane są dwa wierzchołki równoległoboku $A = \binom{2}{5}$ i $B = \binom{5}{1}$ oraz jego pole $s = 17$. Wyznacz współrzędne dwóch pozostałych wierzchołków wiedząc, że punkt przecięcia przekątnych znajduje się na osi OY.

9. W trójkącie ABC dane są wierzchołki $A = \binom{-4}{3}$, $B = \binom{4}{-1}$, $C = \binom{0}{5}$. Znajdź punkt opuszczenia (spodek) wysokości z wierzchołka C na bok AB.

9. Wiadomo, że $\det\left(\binom{1}{0}, U\right) = 1$ oraz że $|U| = 2$. Co można powiedzieć o U?

10. Udowodnij, że dla dowolnych U, V zachodzi nierówność

$$|\langle U, V\rangle| \leq |U||V|.$$

Kiedy w tej nierówności zachodzi równość?

11. Niech $A = \binom{-2}{-3}$, $B = \binom{3}{2}$, $M = \binom{2}{0}$, $N = \binom{-4}{1}$. Rozważając znaki stosownych wyznaczników, rozstrzygnij (bez odwoływania się do rysunku) czy punkty M i N leżą po tej samej stronie prostej AB.